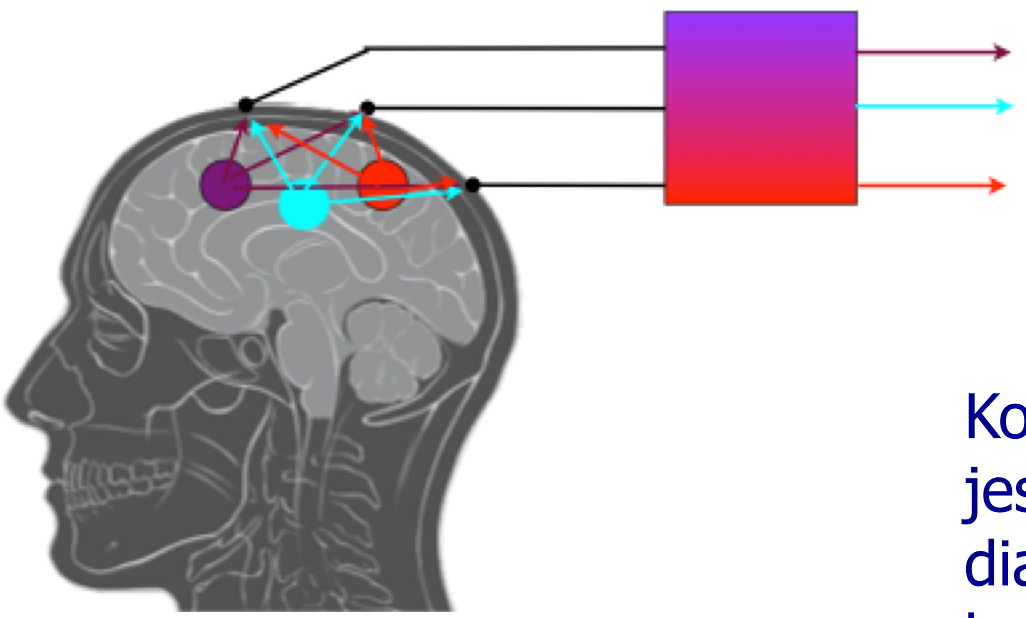
ŚLEPA SEPARACJA ŹRÓDEŁ: CSP

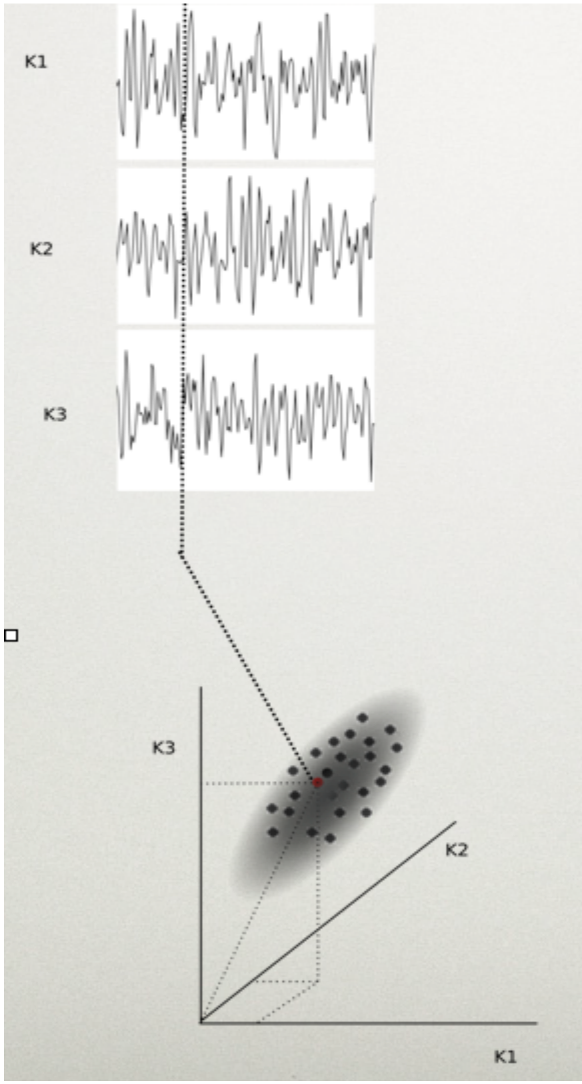
Topografia i filtry przestrzenne

Sygnał EEG jest superpozycją
aktywności elektrycznej wielu źródeł



Konstrukcja filtrów oparta jest o jednoczesną diagonalizację macierzy kowariancji odpowiadających różnym stanom osoby badanej.

Topografia i filtry przestrzenne

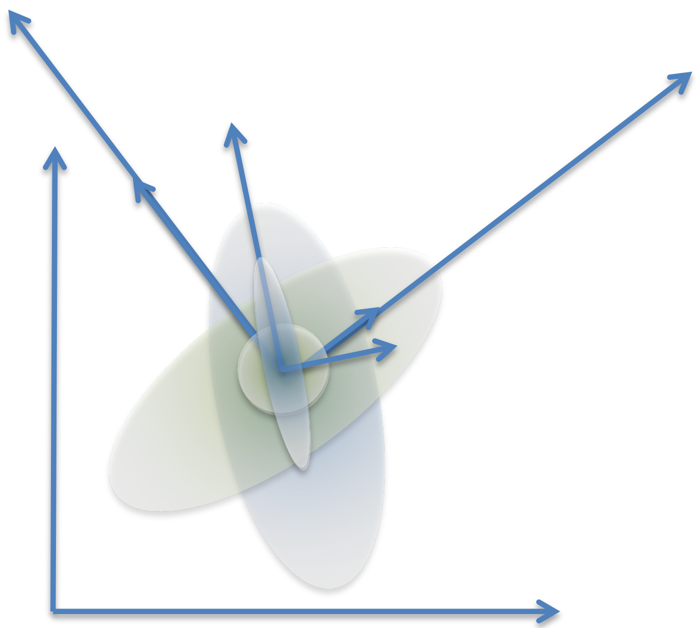


- N - kanałowy sygnał EEG możemy przedstawić jako zbiór wektorów w N-wymiarowej przestrzeni kanałów
- Taki zbiór wygodniej analizować w układzie współrzędnych zgodnym z osiami głównymi macierzy kowariancji
- Jeśli mamy kilka źródeł niezależnej aktywności to macierz kowariancji powinna być diagonalna:
  - Wyrazy na diagonali to wariancja (moc) poszczególnych źródeł
  - Wyrazy poza diagonalą mówią o skorelowaniu poszczególnych źródeł ze sobą

CSP: koncepcja

- Dla ustalenia uwagi możemy myśleć o eksperymencie wywołującym potencjał P300.
- Mamy w nim dwie sytuacje eksperymentalne:
- T (target) próby, w których pojawił się oczekiwany bodziec, zaś
- NT (non-target) gdy pojawił się bodziec standardowy.
- Chcielibyśmy znaleźć taki montaż (*czyli taką kombinację liniową kanałów*), który maksymalizuje stosunek mocy (*wariancji*) sygnałów rejestrowanych w dwóch rożnych warunkach eksperymentalnych.

Jednoczesna diagonalizacja dwóch macierzy



- Zagadnienie to jest równoważne rozwiązaniu uogólnionego zagadnienia własnego

  $$\mathbf{A}w = \lambda\, \mathbf{B}w$$

- w Matlabie robi to funkcja **[W ,Lambda]** = `eig(A,B)`.
- w wyniku dostajemy:
  - macierz wektorów własnych **W** (w kolumnach)
  - oraz macierz **Lambda** zawierającą na przekątnej odpowiadające im wartości własne.

Topografia i filtry przestrzenne

Wspomniana transformacja – odwzorowanie diagonalizujące macierz kowariancji ma następującą interpretację fizyczną:

$\mathbf{s}[t]$ aktywność niezależnych źródeł

$\mathbf{x}[t]$ mierzony sygnał

$\mathbf{A}$ macierz przejścia taka, że: $\mathbf{x}[t] = \mathbf{A}\mathbf{s}[t]$

$$\mathbf{C}_x = E\left\{\mathbf{x}[t]\mathbf{x}[t]^T\right\}$$

$$\mathbf{C}_x = E\left\{\mathbf{A}\mathbf{s}[t]\left(\mathbf{A}\mathbf{s}[t]\right)^T\right\} = \mathbf{A}E\left\{\mathbf{s}[t]\mathbf{s}[t]^T\right\}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{C}_s\mathbf{A}^T$$

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{C}_x\left(\hat{\mathbf{A}}^T\right)^{-1} = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}_x\hat{\mathbf{P}}^T = \mathbf{C}_s$$

diagonalna, ze względu na niezależność źródeł

Formalizm

- Metoda ta polega na znalezieniu takiego kierunku w w przestrzeni sygnałów, że sygnał z warunku T rzutowany na ten kierunek ma dużą wariancje a sygnał z warunku NT ma wariancję małą.
- Rzutowanie sygnału $x(t)$ na kierunek w odbywa się przez policzenie iloczynu skalarnego dla każdej chwili t:

$$s_w(t) = w^T x(t)$$

- Wariancja tego rzutowanego sygnału to:

$$\begin{aligned} var(s_w) &= E[s_w \, s_w^T] \\ &= E[w^T x \, (w^T x)^T] \\ &= w^T E[x \, x^T] \, w \\ &= w^T C_x \, w \end{aligned}$$

- Zatem znalezienie właściwego kierunku rzutowania można wyrazić jako szukanie maksimum wyrażenia $J(w)$:

$$J(w) = \frac{w^T C_T w}{w^T C_{NT} w}$$

Ekstremum tego ilorazu można znaleźć poprzez policzenie gradientu J(w) i przyrównanie go do zera

Formalizm

$$C_T w = \boxed{\frac{w^T C_T w}{w^T C_{NT} w}} C_{NT} w$$

Liczba ta, λ jest uogólnioną wartością własną,
w jest uogólnionym wektorem własnym odpowiadającym tej wartości

Aby znaleźć λ możemy wykorzystać w Matlabie funkcję **`eig`**.

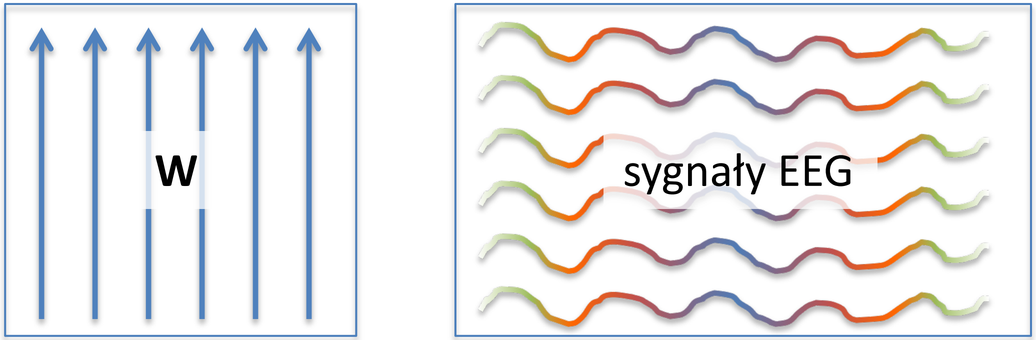
Funkcja ta rozwiązuje (również) uogólnione zagadnienia własne postaci:

Aw = λ **B**w

dostarczając w wyniku macierz wektorów własnych (w kolumnach) oraz macierz zawierającą na przekątnej odpowiadające im wartości własne.

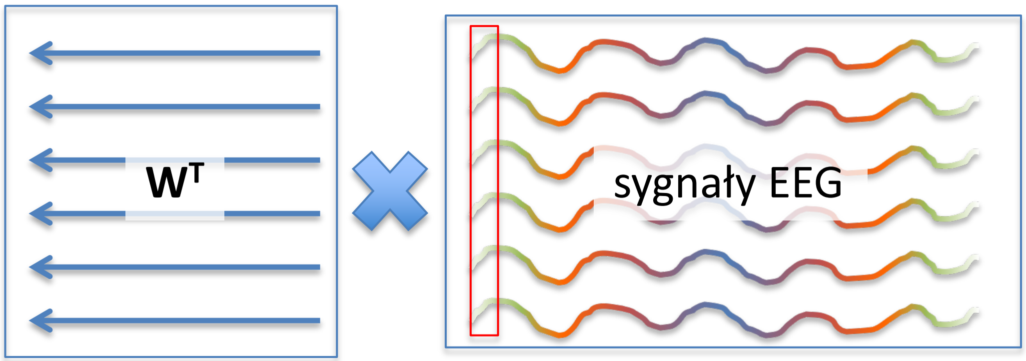
Filtrowanie

[W ,Lambda] = `eig(A,B)`



Filtrowanie

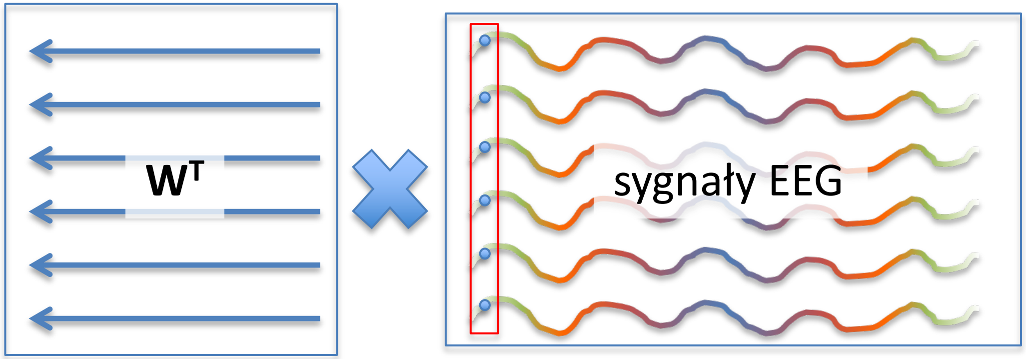
[**W** ,**Lambda]** = **`eig(A,B)`**



Filtr to zestaw współczynników z jakimi należy zsumować sygnały z poszczególnych kanałów EEG aby dostać komponenty odpowiadające hipotetycznym źródłom nieskorelowanym.

Filtrowanie

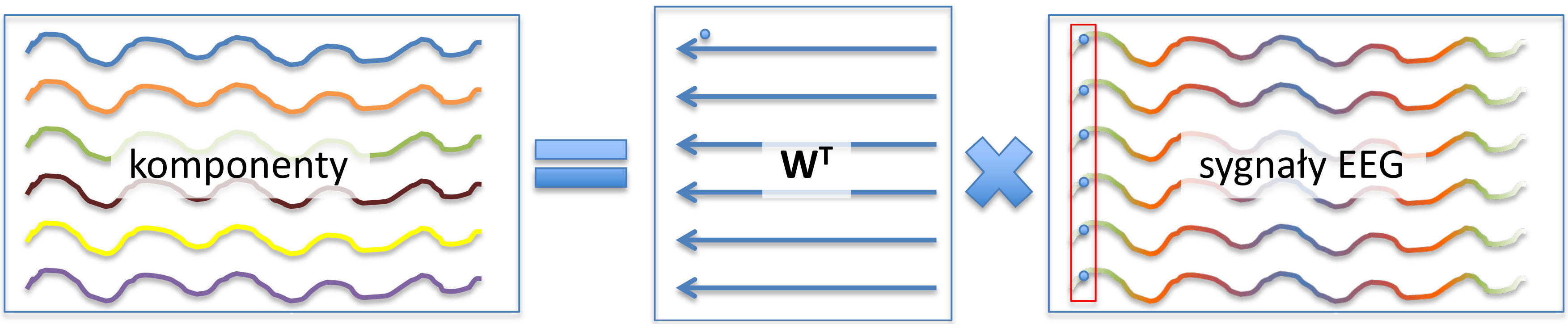
[**W** ,**Lambda**] = **`eig(A,B)`**



Filtr to zestaw współczynników z jakimi należy zsumować sygnały z poszczególnych kanałów EEG aby dostać komponenty odpowiadające hipotetycznym źródłom nieskorelowanym.

Filtrowanie

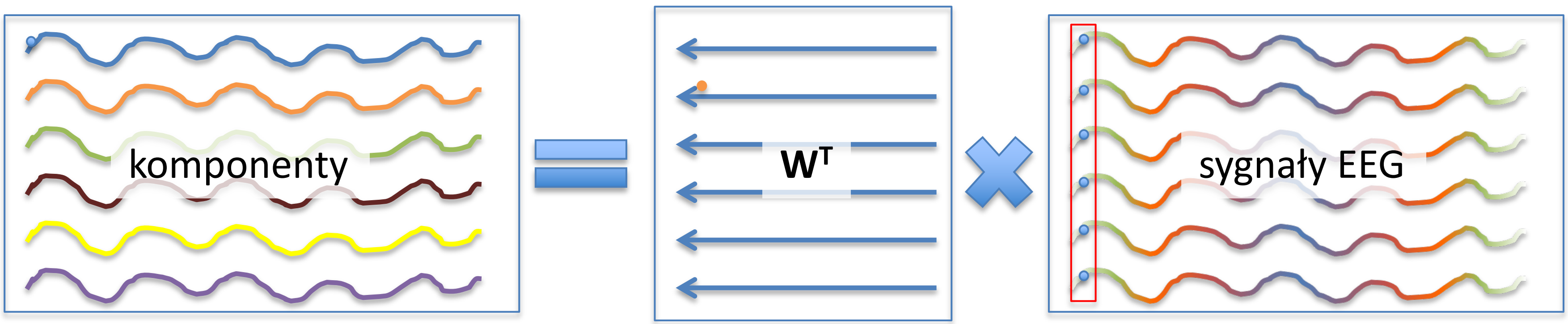
[**W** ,**Lambda**] = `eig(A,B)`



Filtr to zestaw współczynników z jakimi należy zsumować sygnały z poszczególnych kanałów EEG aby dostać komponenty odpowiadające hipotetycznym źródłom nieskorelowanym.

Filtrowanie

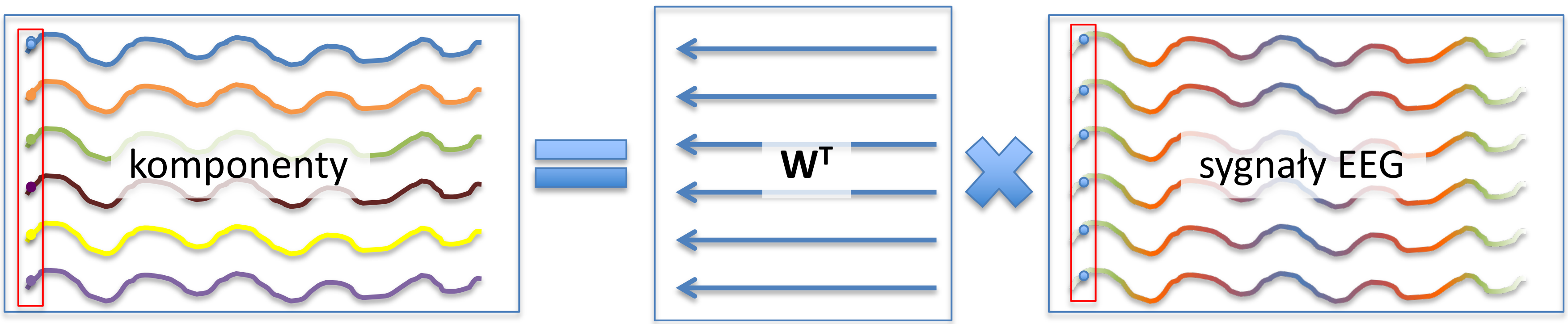
[**W** ,**Lambda**] = `eig(A,B)`



Filtr to zestaw współczynników z jakimi należy zsumować sygnały z poszczególnych kanałów EEG aby dostać komponenty odpowiadające hipotetycznym źródłom nieskorelowanym.

Filtrowanie

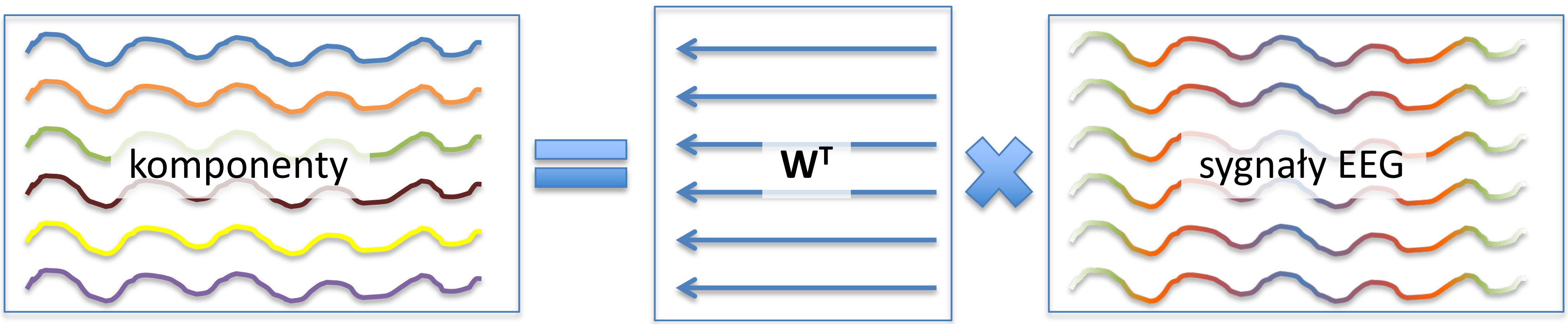
[**W** ,**Lambda**] = **`eig(A,B)`**



Filtr to zestaw współczynników z jakimi należy zsumować sygnały z poszczególnych kanałów EEG aby dostać komponenty odpowiadające hipotetycznym źródłom nieskorelowanym.

Filtrowanie

[**W** ,**Lambda**] = **`eig(A,B)`**
S = W'*EEG

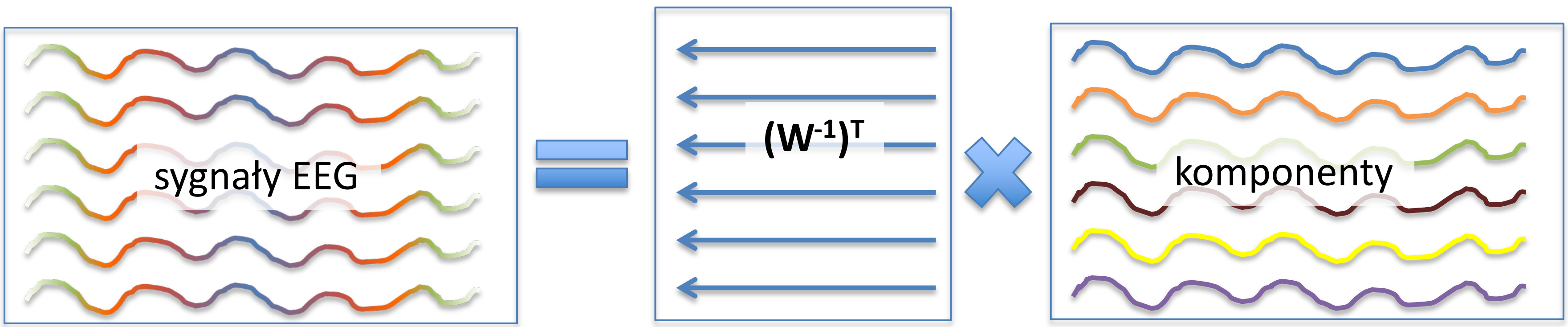


Filtr można zilustrować na głowie, przypisując poszczególnym pozycjom elektrod wagi równe współrzędnym wektora **w. ->** Tak będziemy je ilustrować w czasie ćwiczeń.

W EEGlabie wagi te są interpolowane pomiędzy elektrodami i tworzą mapki.

Topografie źródeł

[W ,Lambda] = `eig(A,B)`
S = W'*EEG
EEG = (W^(-1))'*S



Topografia źródła to zestaw współczynników z jakimi docierają one do poszczególnych kanałów EEG.

Topografia zawarta jest w wierszach macierzy odwrotnej do **W**

Filtry dla SSVEP

Aby w badanym sygnale znaleźć składowe odpowiadające SSVEP musimy rzutować sygnał X (macierz sygnałów kanały × próbki) na przestrzeń rozpiętą przez S:

$$A = X*S$$

Macierz A zawiera współczynniki będące iloczynami skalarnymi sygnałów i wersorów. Mówią one o tym „jak dużo” jest sinusa bądź cosinusa o danej częstości w pierwotnym sygnale. Komponenty SSVEP zawarte w sygnale X odzyskujemy tak:

$$SSVEP = A\, S^T$$

Modelujemy rejestrowany sygnał jako:

$$X = SSVEP + Y$$

gdzie:

$$Y = X - SSVEP$$

to wszystkie komponenty sygnału, które nas nie interesują.

Filtry dla SSVEP

Filtr przestrzenny, który chcemy zbudować powinien maksymalizować stosunek
wariancji

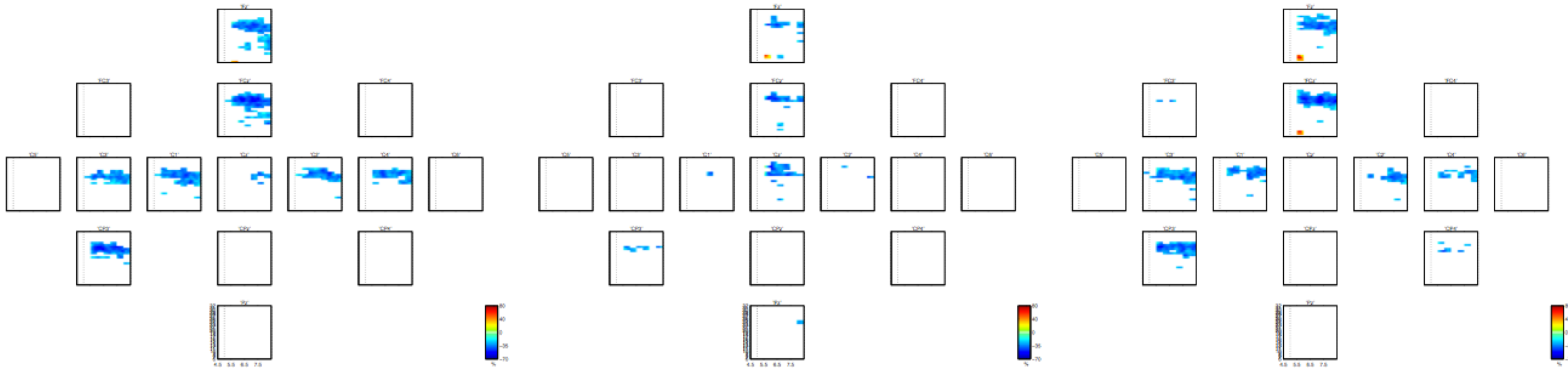
$$SSVEP = A\ S^T$$

do wariancji $Y = X - SSVEP$.

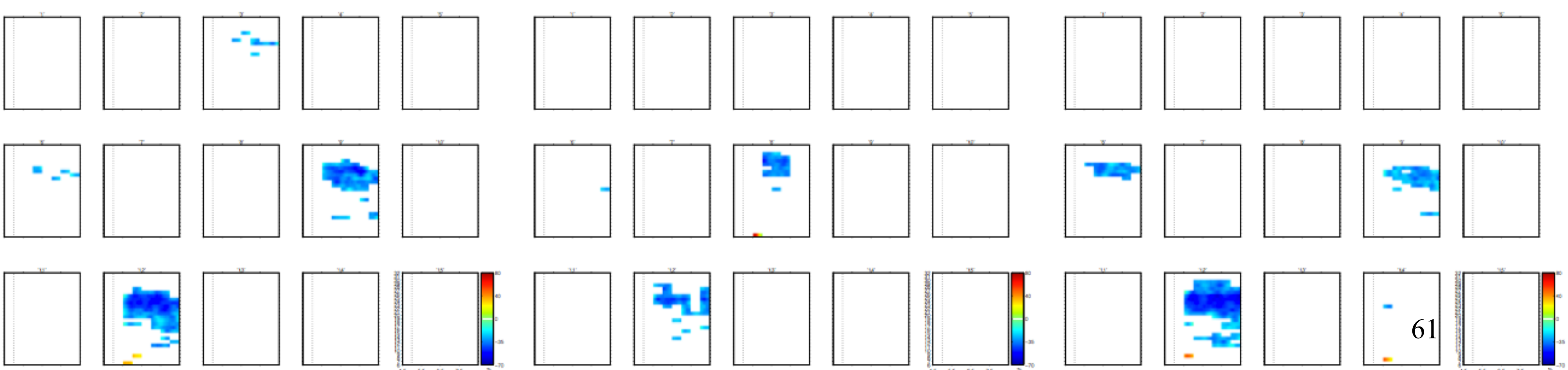
Macierz kowariancji powinna być uśredniona po powtórzeniach a kowariancja sygnału w każdym powtórzeniu powinna być znormalizowana poprzez podzielenie przez jej ślad.

Dalej możemy zastosować technikę znaną z konstrukcji filtrów CSP, tzn. maksymalizacji ilorazu Rayleigha za pomocą rozwiązania uogólnionego zagadnienia własnego dla macierzy kowariancji SSVEP i Y .

Topografia i filtry przestrzenne dla więcej niż 2 stanów: ffdiag



lewa ręka　　　　stopa　　　　prawa ręka



Uwagi praktyczne do CSP

Obliczanie macierzy kowariancji w Matlabie

- Macierze kowariancji dla każdego z warunków uśredniamy po realizacjach
- Dla danej realizacji możemy zastosować funkcję: **cov**
- Czasem pomaga normalizowanie tej funkcji przez jej ślad (*całkowita moc danej próby*) - artefakty

Interpretacja wyników

- W wynikowej macierzy **W** filtry przestrzenne znajdują się w jej kolumnach
- Rzutowanie sygnału EEG na te filtry daje komponenty
- Filtr związany z największą wartością własną daje komponent, którego wariancja jest największa w warunku **A** względem wariancji w warunku **B**
- **Utożsamianie komponentów z fizjologicznymi źródłami jest ryzykowne**