

4. Pole magnetyczne

4.1 Własności pola magnetycznego

4.2 Prawo Gaussa, prawo Ampera, prawo Biota-Savarta;

4.3 Siły działające na przewodnik w polu magnetycznym: siła Lorentza, siła Ampera

4.4. Pole magnetyczne w materii, mikroskopowy opis magnetyzmu

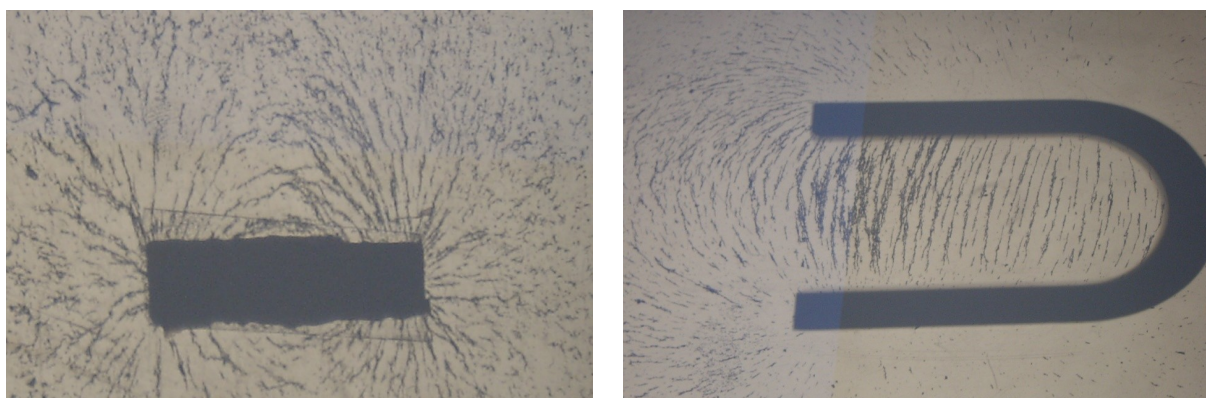
4.5 Indukcja elektromagnetyczna

4.6 Indukcyjność cewki, transformator

4.7 Obwody prądu przemiennego

4.1. Własności pola magnetycznego

Istnienie oddziaływań magnetycznych znane było już w starożytności. Wiadomo było, że pewne minerały, jak np. magnetyt ($\text{FeO}_2 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$) czy piryt magnetyczny ($6\text{FeS} \cdot \text{Fe}_2\text{S}_3$) przyciągają kawałki żelaza. Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego, obszar, w którym występuje oddziaływanie magnetyczne nazywamy polem magnetycznym. Pole magnetyczne wizualizować można używając opiłków żelaznych, które układają się wzdłuż linii pola. Rozkład pola magnetycznego wokół magnesu sztabkowego i podkowiastego przedstawiony jest na Rys. 4.1.1.



Rys.4.1.1. Rozkład pola magnetycznego wokół magnesu sztabkowego (po lewej) i podkowiastego (po prawej).

Na Rys. 4.4.1. dobrze widać, że linie pola magnetycznego biegną od jednego bieguna magnetycznego do drugiego. Umownie przyjęto, że zwrot linii magnetycznych skierowany jest od bieguna północnego (N) do bieguna południowego (S). Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego można zdefiniować wektor gęstości strumienia magnetycznego \mathbf{B} – zwanego *indukcją magnetyczną*. Strumień pola magnetycznego Φ_B przenikający powierzchnię S będzie zatem równy:

$$\int_S d\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

Całkowity strumień pola magnetycznego przenikający powierzchnię zamkniętą równy 0. Korzystając z prawa Gaussa można zatem napisać:

$$0 = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{B} dV$$

z czego wynika podstawowe równanie opisujące własności pola magnetycznego:

$$\operatorname{div} B = 0$$

4.2. Prawo Gaussa, prawo Ampera, prawo Biota-Savarta;



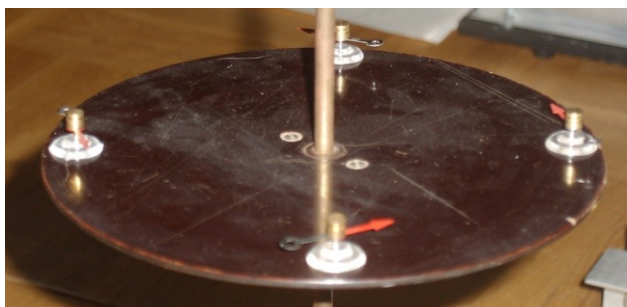
Badania Christiana Oersteda na początku XIX w. pokazały, że powstanie pola magnetycznego związane jest z przepływem prądu elektrycznego. Linie pola magnetycznego powstającego wokół prostoliniowego przewodnika z prądem są koncentrycznymi okręgami o środku w punkcie umieszczenia przewodnika z prądem. Pokazuje to ustawienie igiełek magnetycznych rozmieszczonych dookoła takiego przewodnika (patrz Rys. 4.2.2).

Rys. 4.2.1. Christian Oersted (1777 -1851)

Indukcję pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem określa prawo Biota-Savarta. Element indukcji magnetycznej $d\vec{B}$ będący wynikiem przepływu prądu o natężeniu I w elemencie przewodu o długości ds (którego zwrot zgadza się z kierunkiem przepływu prądu) w punkcie odległym o r od tego elementu (por. Rys. 4.2.3):

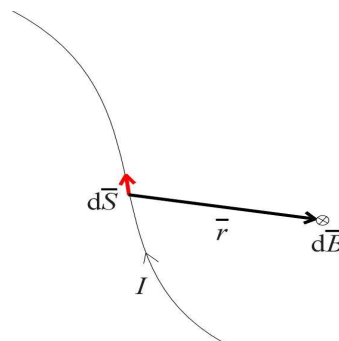
$$d\vec{B} = I \frac{ds \times \vec{r}}{r^3} \frac{\mu_0}{4\pi}$$

gdzie μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni: $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$.

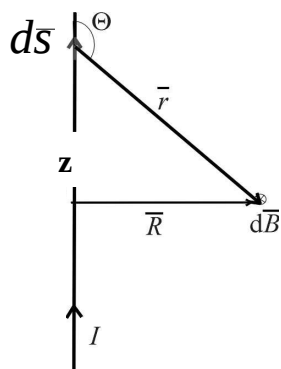


Rys. 4.2.2. Pole magnetyczne wokół prostoliniowego przewodnika z prądem.

Korzystając z prawa Biota-Savarta można wyznaczyć wartość pola magnetycznego w odległości r od prostoliniowego przewodnika z prądem o nieskończonej długości (patrz Rys. 4.2.4.):



Rys. 4.2.3. Pole magnetyczne w odległości r od przewodnika z prądem.



Rys. 4.2.4. Pole magnetyczne w odległości R od przewodnika z prądem

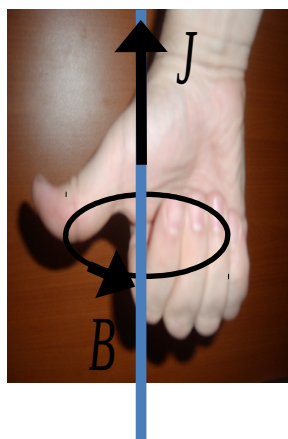
$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin \Theta}{4\pi r^2}$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2} \quad \sin \Theta = \sin(\pi - \Theta) = \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dz R}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dz R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \Big|_0^\infty = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(0 - \frac{1}{R} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Zwrot wektora indukcji pola magnetycznego określony jest regułą prawej dłoni (patrz. Rys. 4.2.5).



Rys. 4.2.5. Reguła prawej dłoni określająca zwrot indukcji pola magnetycznego B wokół przewodnika z prądem.



Rys. 4.2.6. Andre Marie Ampere (1775 -1836)

Ponieważ pole magnetyczne w takim przypadku zależy tylko od odległości od przewodnika z płynącym prądem, to krążenie wektora indukcji magnetycznej B po obwodzie zamkniętym obejmującym przewodnik z prądem o natężeniu I równe jest:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$

Wynik ten można uogólnić. Dla dowolnego układu prądów krążenie wektora indukcji magnetycznej po konturze zamkniętej równe jest sumie prądów płynących wewnątrz tego konturu. Jest to treść **prawa Ampere'a**.

Prawo to można zapisać także w postaci różniczkowej. Z twierdzenia Stokesa wynika, że:

$$\oint B \cdot dl = \int_{\Sigma} (\nabla \times B) \cdot dS$$

jednocześnie:

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I = \mu_0 \int_{\Sigma} J \cdot dS$$

gdzie J jest gęstością prądu. Zatem:

$$\mu_0 \int_{\Sigma} J \cdot dS = \int_{\Sigma} (\nabla \times B) \cdot dS \Rightarrow \int_{\Sigma} [(\nabla \times B) - \mu_0 J] \cdot dS = 0$$

Ponieważ równość ta jest prawdziwa dla każdego konturu oznacza to, że musi znikać funkcja podcałkowa:

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

Należy pamiętać, że powyższa postać prawa Ampere'a ma zastosowanie w sytuacji, gdy pole elektryczne jest stacjonarne. Zmienne pole elektryczne powoduje pojawienie się dodatkowego składnika tego równania, o czym powiemy wkrótce.

Korzystając z prawa Biota-Savarta można także znaleźć indukcję pola magnetycznego na osi kołowej pętli, w której płynie prąd o natężeniu I . Stosując oznaczenia z Rys. 4.2.7. można napisać:

$$B = \int dB_{\parallel} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dS \cos \alpha$$

Jednocześnie:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dS = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

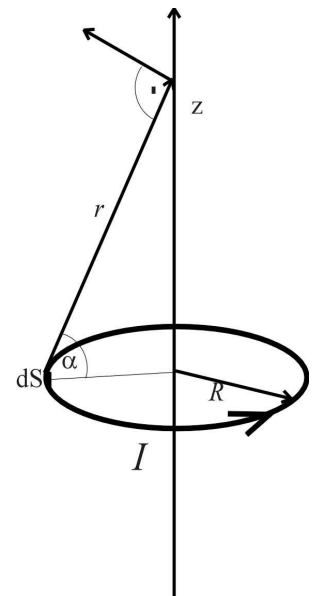
Dla $z \gg R$:

$$B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{z^3}$$

$$\mu = ISn$$

Wprowadzając pojęcie **dipolowego momentu magnetycznego** pętli z prądem można powyższy wzór zapisać w postaci:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$



Rys. 4.2.7. Pole magnetyczne na osi pętli z prądem w odległości R

Kierunek dipolowego momentu magnetycznego pętli z prądem \mathbf{n} jest prostopadły do płaszczyzny, w której się ona znajduje, wartość odpowiada iloczynowi natężenia prądu i pola powierzchni pętli, zaś zwrot jest określony regułą prawej dłoni. Omawiając podstawowe związki pomiędzy prądem elektrycznym, a polem magnetycznym nie sposób nie przypomnieć, że większość z nich została znaleziona w 1820 r. Rok ten zwany „*annus mirabilis*” obfitował w odkrycia, w szczególności (za *Dzieje rozwoju fizyki*, Warszawa 1931):

- ▶ 21 lipca **Oersted** odkrywa odchylenie igły magnetycznej przez prąd,
- ▶ 25 września **Arago** odkrywa magnesjące działanie prądu, na propozycję Laplace’a wzmacnia to działanie przez spiralne nawinięcie drutu i buduje pierwszy elektromagnes,
- ▶ 25 września **Ampere** odkrywa działanie prądu na prąd i stwarza elektrodynamikę,
- ▶ Jesienią **Biot** i **Savart** formułują ilościowe prawo działania prądu na biegnący magnetyczny,
- ▶ 10 i 11 listopada **Biot** i **Davy** niezależnie od siebie otrzymują namagnesowanie żelaza za pomocą iskry
- ▶ 14 grudnia **Seebeck** daje dokładny opis działania magnetycznego

4.3 Siły działające na przewodnik w polu magnetycznym: siła Lorentza, siła Ampera

Doświadczenie uczy, że na cząstkę o ładunku q poruszającą się w polu magnetycznym z prędkością \mathbf{v} działa siła \mathbf{F}_L , zwana siłą Lorentza:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Siła ta skierowana jest jak widać prostopadle do kierunku ruchu cząstki i indukcji magnetycznej, zatem nie pojawia się, gdy cząstka porusza się wzdłuż linii pola magnetycznego. Działanie siły Lorentza można zaobserwować w szeregu doświadczeń. Jej działanie jest odpowiedzialne za sterowanie kierunkiem ruchu wiązki elektronów w lampie katodowej. Siła Lorentza jest też odpowiedzialna za klasyczny efekt Halla – powstawanie poprzecznego pola elektrycznego w przewodniku w którym płynie prąd elektryczny.

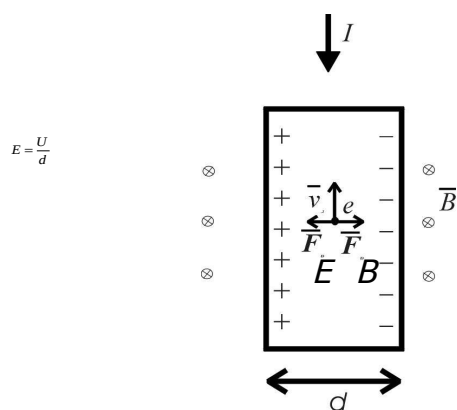
Swobodny nośnik poruszający się z prędkością \mathbf{v} prostopadłą do kierunku pola magnetycznego, pod wpływem siły Lorentza zakrzywia swój tor i zaczyna się poruszać po kołowej orbicie cyklotronowej. Promień tej orbity:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m v}{q B}$$

zależy od stosunku masy do ładunku cząstki. Znając jej prędkość można zatem na podstawie znajomości promienia orbity cyklotronowej wyznaczyć ten stosunek co umożliwia identyfikację cząstki. Zasada ta wykorzystywana jest przy konstrukcji spektrometrów masowych. Ponieważ siła Lorentza działa prostopadle do kierunku prędkości cząstki, nie wykonuje przy tym żadnej pracy, a więc w szczególności nie zmienia jej energii kinetycznej. Zakrzywienie toru ruchu cząstek elementarnych wykorzystywane jest w konstrukcji cyklotronów i synchrotronów – akceleratorów cząstek elementarnych. Najśłynniejszym takim urządzeniem jest Large Hadron Collider (LHC), uruchomiony 10 września 2008. Przyspiesza on przeciwbieżne wiązki proton-proton (14 TeV) i proton-jądro ołowiu (1150 TeV). Cząstki są w stanie okrążyć tunel o długości 27 kilometrów 11 000 razy na sekundę. Tory cząstek zakrzywiają schłodzone helem do 1,9 K (−271,05°C) elektromagnesy, przez które płynie prąd elektryczny o natężeniu do 11850 A.

Efekt Halla

Jednym z przejawów działania siły Lorentza jest efekt Halla obserwowany w przewodnikach i półprzewodnikach. Kiedy próbkę z płynącymi nośnikami umieścimy w polu magnetycznym skierowanym prostopadle do kierunku ruchu nośników, działająca na nie siła Lorentza odchyli



Rys. 4.3.1 Efekt Halla

ich ruch prowadząc do powstania poprzecznego pola elektrycznego. Natężenie tego pola można znaleźć przyrównując siłę Lorentza i siłę elektrostatyczną:

$$eE = ev_d B$$

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{I}{neS}$$

Pamiętając jednocześnie, że : , gdzie S jest przekrojem próbki, możemy napisać, że

$$\frac{I}{neS} = \frac{E}{B} \Rightarrow n = \frac{IB}{eES} = \frac{IBd}{eUS} = \frac{IB}{eUI}$$

Wynika z tego, że tzw. napięcie Halla U_H zależy odwrotnie proporcjonalnie od

$$U_H = \frac{1}{ne} \frac{IB}{l} = R_H \frac{IB}{l}$$

koncentracji nośników , gdzie l jest grubością próbki.

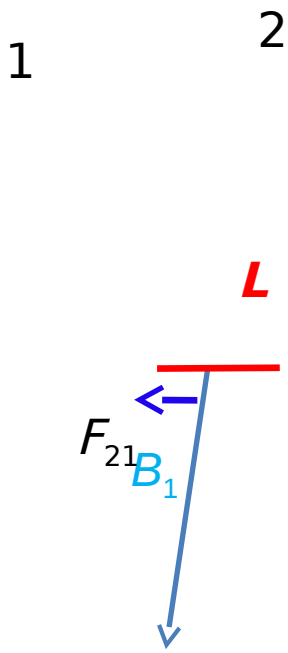
Konsekwencją działania pola magnetycznego na poruszające się ładunki jest **siła Ampera**, działająca na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym. Na każdy odcinek przewodnika o długości dL , w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu I , umieszczony w polu magnetycznym o indukcji B działa siła F wyrażona wzorem:

$$dF = IdL \times B$$

Podobnie jak w przypadku siły Lorentza, siła Ampera jest skierowana prostopadle do kierunku pola magnetycznego i kierunku, w którym płynie prąd elektryczny. Działanie siły Ampere'a można zademonstrować umieszczając w polu magnetycznym zawieszoną swobodnie ramkę z przepływającym prądem (patrz. Rys. 4.3.1). W zależności od kierunku przepływającego prądu ramka wychyli się w jedną lub w drugą stronę.



Rys. 4.3.2. Ramka zawieszona nad magnesem (po lewej). Po przepuszczeniu przez ramkę prądu elektrycznego zaczyna na nią działać siła, która powoduje jej wychylenie (po prawej)



Rys. 4.3.3. Oddziaływanie dwóch przewodników z prądem

Pamiętając o tym, że wokół prostoliniowego przewodnika z prądem powstaje pole magnetyczne o indukcji B można natychmiast wyjaśnić źródło oddziaływania pomiędzy dwoma przewodnikami, w których płynie prąd. Jeśli w równoległych przewodnikach płynie prąd o natężeniu odpowiednio I_1 i I_2 to na każdą jednostkę długości tych przewodników działać będzie siła F :

$$\vec{F}_{21} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} L$$

Siła ta jest podstawą definicji ampera jako jednostki układu SI. 1 amper to niezmienny prąd elektryczny, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo

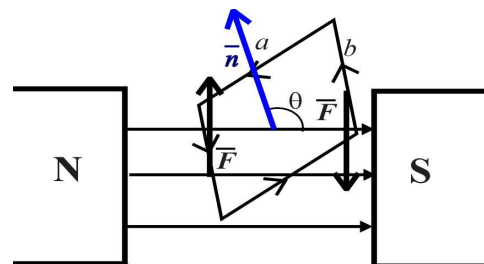
małym przekroju kołowym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m od siebie, spowodowałby wzajemne oddziaływanie przewodów na siebie z siłą równą $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu.

Na ramkę z prądem umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym działa moment siły. Łatwo pokazać, że moment siły M równy jest:

$$M = F \frac{a}{2} \sin \theta + F \frac{a}{2} \sin \theta = Fa \sin \theta$$

Ponieważ $F = IbB$ to:

$$M = Iba \sin \theta$$



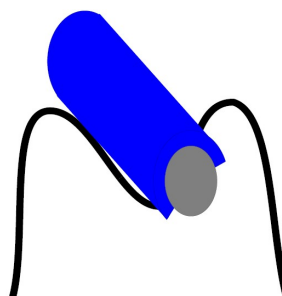
4.3.3 Moment siły działający na ramkę z prądem

Wprowadzając pojęcie momentu magnetycznego

ramki z prądem μ , który jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny ramki o długości będącej iloczynem natężenia prądu I i powierzchni ramki, uzyskujemy wzór na moment siły działający na ramkę z prądem (moment magnetyczny, dipolowy moment magnetyczny, dipol magnetyczny) w jednorodnym polu magnetycznym:

$$M = \mu \times B$$

Ten moment siły wykorzystywany jest przy konstrukcji silników elektrycznych, takich jak ten pokazany na Rys. 4.3.4



4.3.4. Prosty model silnika elektrycznego

Z dipolem magnetycznym w polu magnetycznym związana jest pewna energia potencjalna.

$$W = \int M d\theta$$

Przy jego obracaniu wykonywana jest praca: . Przyjmuje się, że energia potencjalna jest równa zero gdy $\theta=90^\circ$, zatem:

$$E_p = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta' = -\int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta' = -\int_{90^\circ}^{\theta} \mu B \sin \theta' d\theta' = -\mu B \cos \theta' \Big|_{90^\circ}^{\theta} = -\mu B \cos \theta = -\mu \cdot B$$

Przypomnijmy, że podobny wzór opisywał energię potencjalną dipola elektrycznego w polu

$$E_p = -p \cdot E$$

elektrycznym:

4.4. Pole magnetyczne w materii, mikroskopowy opis magnetyzmu

Zauważając, że pętla z płynącym prądem jest źródłem dipolowego momentu magnetycznego można korzystając z tej koncepcji wyjaśnić zachowanie niektórych materiałów w polu magnetycznym. Mikroskopowy dipolowy moment magnetyczny związany jest z *orbitalnym* ruchem elektronów w atomach, a także z pewną fundamentalną własnością cząstek elementarnych jaką jest ich wewnętrzny moment pędu – *spin*.

Związek orbitalnego ruchu elektronów w atomie z magnetycznym momentem dipolowym można pokazać stosując klasyczny obraz ruchu cząstki naładowanej w polu siły elektrostatycznej. Trzeba jednak pamiętać, że model ten **nie ma** zastosowania do opisu zachowania elektronu w atomie, który to opis wymaga zastosowania metod mechaniki kwantowej.

Rozważmy zatem elektron o masie m i ładunku $-e$ poruszający się po orbicie kołowej o promieniu r wokół jądra atomowego.

Ruch taki równoważny jest przepływowi

prądu o natężeniu $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$. Prąd płynący

w obwodzie o powierzchni πr^2 powoduje powstanie dipolowego momentu magnetycznego

o wartości: $\mu = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr$.

Jednocześnie elektron poruszający się po okręgu

ma moment pędu $L_{orb} = mvr$.

Oznacza to, że dipolowy moment magnetyczny wiąże się z orbitalnym momentem pędu

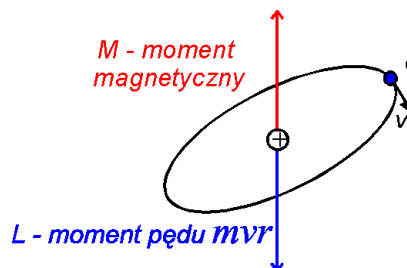
relacją: $\vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{L}_{orb}$, w której wzięliśmy pod uwagę zwroty obu wielkości.

Analiza powyższa pokazuje, że dipolowy moment magnetyczny wiąże się z orbitalnym momentem pędu. W rzeczywistości, w atomach elektrony nie poruszają się po dobrze określonych orbitach, tym niemniej posiadają one dobrze określony moment pędu, których wartość może przyjmować tylko pewne wartości (jest skwantowana):

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

gdzie l jest tzw. orbitalną liczbą kwantową i przyjmuje wartości całkowite $l = 0, 1, 2, \dots$,

zaś $\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, jest stałą Plancka. Prawdą także pozostaje fakt, że dipolowy



Rys. 4.4.1. Schematyczna prezentacja związku momentu magnetycznego z momentem pędu dla klasycznej cząstki poruszającej się po orbicie kołowej.

moment magnetyczny odpowiadający emu momentowi pędu wyraża się wzorem uzyskanym powyżej:

$$\mu = \frac{-e}{2m} \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

W zależności od budowy atomów i cząsteczek orbitalny i spinowy moment magnetyczny mogą w różny sposób wpływać na własności magnetyczne materii. Z tego punktu widzenia rozróżniamy:

- a) diamagnetyki
- b) paramagnetyki
- c) ferromagnetyki
- d) nadprzewodniki

Do opisu tych własności będziemy używać wektora namagnesowania M , który jest całkowitym momentem magnetycznym przypadającym na jednostkę objętości (por. Rys. 4.4.2):

$$\mu = MV = Mabc$$

Wiadomo, że dla stałych w czasie prądów i pól elektrycznych:

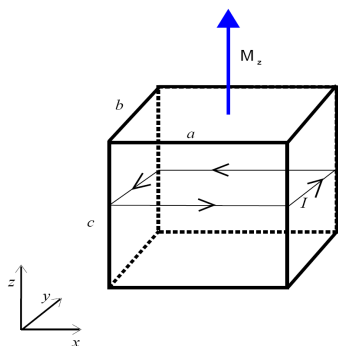
$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J}$$

Podzielimy prądy na „swobodne” i „związane”

$$\vec{J} = \vec{J}_{sw} + \vec{J}_{zw}$$

Pokażemy poniżej, że gęstość prądu \vec{J}_{zw} w można przedstawić w postaci:

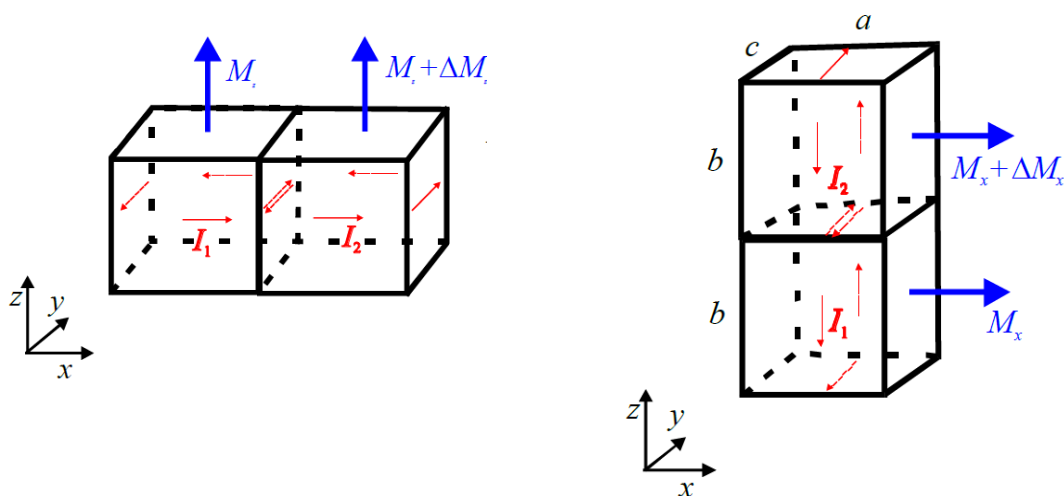
$$\vec{J}_{zw} = \nabla \times \vec{M}$$



Rys. 4.4.2 Namagnesowanie elementu objętości

Wiadomo jednak, że

$$\mu = IA \Rightarrow I = M_z b$$



Rys. 4.4.3 Wkłady do namagnesowania

$$I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} a$$

$$I = -\frac{\partial M_z}{\partial x} ab \Rightarrow J_{y1} = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Dodatkowa składowa J_y pochodzi od prądów płynących po powierzchni pomiędzy klockami ustawionymi jeden na drugim, zatem ostatecznie:

$$J_y = -\frac{\partial M_z}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

czyli:

$$J_{zw} = \nabla \times M$$

Równocześnie wprowadzamy wektor natężenia pola magnetycznego H , odpowiadający prądom swobodnym:

$$\nabla \times H = J_{sw}$$

Uzyskując ostatecznie związek między wektorami magnetycznymi o postaci:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

czyli

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (H + \chi_m H) = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu H$$

χ_m – podatność magnetyczna

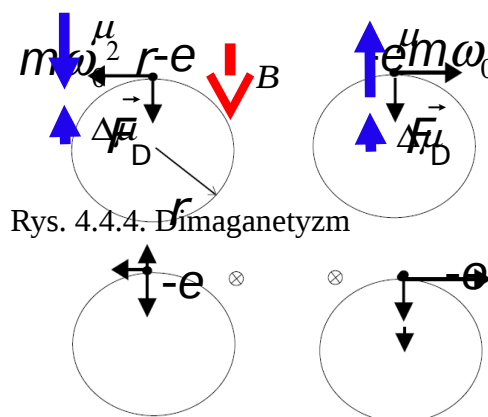
μ – przenikalność magnetyczna materiału

Równania magnetostatyki w obecności materii:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_{sw} \\ B &= \mu H \end{aligned}$$

Diamagnetyki

Atomy diamagnetyczne takich pierwiastków jak miedź, cynk, srebro, złoto, rtęć czy bizmut nie posiadają wypadkowego momentu pędu, a przez to nie mają momentu magnetycznego. Moment magnetyczny indukowany jest pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. Ścisły opis tego zjawiska wymaga podejścia kwantowo - mechanicznego, jednak analiza klasyczna także prowadzi do poprawnego wyniku co uzasadnia zapoznanie się z nią w tym miejscu. Załóżmy, że elektron o ładunku $-e$ i masie m porusza się po orbicie kołowej o promieniu r częstością kątową ω (patrz Rys. 4.4.4.).



Rys. 4.4.4. Diamagnetyzm

Ruch ten odbywa się pod wpływem siły

$$F_D = m\omega_0^2 r$$

dośrodkowej . Zwrot momentu

magnetycznego związanego z tym ruchem zależy

od zwrotu momentu pędu elektronu. Wypadkowy

moment pędu (i moment magnetyczny) jest równy

zeru, co można interpretować zakładając jednakowy

przyczynek każdej z opisanych sytuacji. Po

włączeniu zewnętrznego pola magnetycznego B ,

siła dośrodkowa zmieni się o składnik związany z

siłą Lorentza: $F_L = evB = e\omega_0 r B$

$$m\omega^2 r = m\omega_0^2 r \pm e\omega_0 r B$$

, czyli:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{e\omega_0}{m} B$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{eB}{m\omega_0}} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{eB}{2m\omega_0} \right) = \omega_0 \pm \frac{eB}{2m}$$

$$\Delta\omega = \pm \frac{eB}{2m}$$

czyli ostatecznie:

Odpowiadająca takiej zmianie częstości zmiana momentu magnetycznego równa jest

$$|\Delta\vec{\mu}| = \frac{1}{2} e r^2 \frac{eB}{2m} = \frac{1}{4} \frac{e^2 r^2 B}{m}, \text{ przy czym zmiana momentu magnetycznego zawsze}$$

skierowana jest przeciwnie do przyłożonego pola magnetycznego \mathbf{B} . Podatności magnetyczne diamagnetyków są niewielkie (rzędu 10^{-6}), zaś próbki diamagnetyczne są wypychane z obszaru silnego pola magnetycznego.

Podatność magnetyczna niektórych diamagnetyków

diamagnetyk	podatność magnetyczna * 10^6
miedź	-10
cynk	-13.4
srebro	-26.6
bismut	-160.0

Należy też zauważyć, że diamagnetyzm jest cechą wszystkich atomów, zaś obserwowalny efekt pojawia się tylko wtedy, gdy nie przesłaniają go znacznie silniejsze efekty związane z niezerowym momentem magnetycznym cząstek, istniejącym w nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego

Paramagnetyki

Paramagnetyki posiadają niezerowy moment magnetyczny. Jednak w skończonej temperaturze, ze względu na drgania termiczne, wypadkowy moment magnetyczny przypadający na jednostkę objętości paramagnetyka (namagnesowanie \mathbf{M}) wynosi zero. Po przyłożeniu zewnętrznego pola magnetycznego poszczególne momenty magnetyczne dążą do uporządkowania. Załóżmy, że atom posiada niezerowy moment magnetyczny, który może

przyjmować tylko dwie wartości $+\mu$ lub $-\mu$. W zewnętrznym polu magnetycznym \mathbf{B} energia atomu wzrośnie o:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\uparrow} &= -\vec{\mu}\vec{B} \\ \Delta E_{\downarrow} &= \mu B\end{aligned}$$

w zależności od kierunku pola. Jeśli moment magnetyczny skierowany jest wzdłuż kierunku pola (\uparrow) energia maleje, jeśli jest skierowany przeciwnie (\downarrow) – rośnie.

Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii E wynosi:

$$p \propto e^{-\frac{E}{kT}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}},$$

zatem liczba atomów o momencie magnetycznym skierowanym „w górę” i „w dół” wynosi odpowiednio:

$$N_{\uparrow} = a \exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) \quad N_{\downarrow} = a \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)$$

Ponieważ:

$$N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = N$$

to stała normalizująca:

$$a = \frac{N}{\exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}$$

Wypadkowy średni moment magnetyczny wynosi:

$$\langle \mu \rangle = \frac{N_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{N}$$

czyli wypadkowe namagnesowanie równe jest:

$$M = n\langle \mu \rangle = n\mu \frac{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)} = n\mu \operatorname{tgh}\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

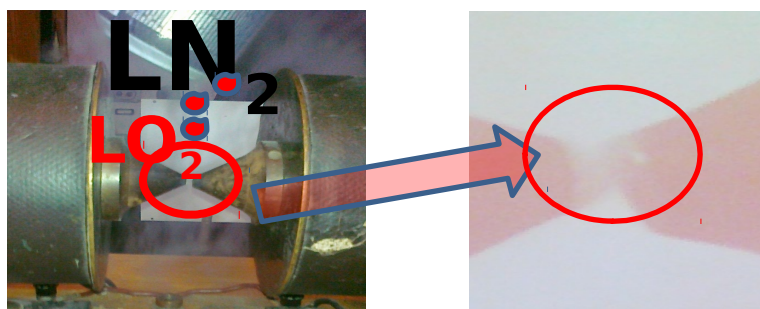
Dla małych pól magnetycznych:

$$M \approx n\mu \frac{1 + \frac{\mu B}{kT} - 1 + \frac{\mu B}{kT}}{1 + \frac{\mu B}{kT} + 1 - \frac{\mu B}{kT}} = \frac{n\mu^2 B}{kT}$$

co oznacza, że namagnesowanie jest wprost proporcjonalne do indukcji magnetycznej B i odwrotnie proporcjonalne do temperatury T . Stanowi to treść prawa Curie:

$$M = c \frac{B}{T}$$

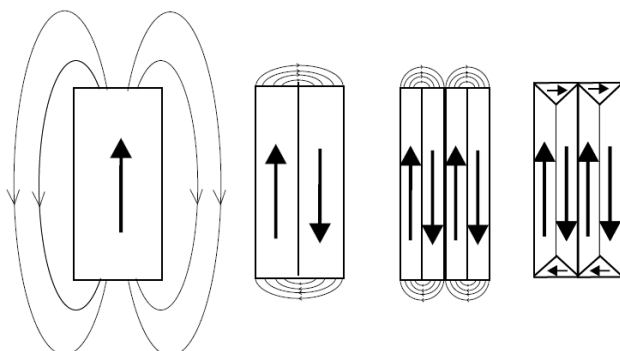
Magnesowanie makroskopowego ciała w zewnętrznym polu magnetycznym w kierunku zgodnym z kierunkiem pola zewnętrznego. W niezbyt niskich temperaturach oraz dla niezbyt silnych pól magnetycznych paramagnetyki wykazują liniową wielkość namagnesowania od pola zewnętrznego.



Rys. 4.4.5. Paramagnetyk wciągany jest w obszar silnego pola magnetycznego. Ciekły tlen sływa kroplami po metalowej puszcze wypełnionej ciekłym azotem (temperatura wrzenia azotu $-195,8 \text{ }^\circ\text{C}$ jest niższa niż temperatura wrzenia tlenu: $-182,97 \text{ }^\circ\text{C}$). Kiedy kropla tlenu znajdzie się pomiędzy nabiegunnikami magnesu zostanie przez nie przyciągnięta.

Ferromagnetyki

W pięciu pierwiastkach (żelazo, kobalt, nikiel, gadolin i dysproz) oraz w szeregu stopach i związkach tych pierwiastków występuje efekt pozwalający na uzyskanie dużego uporządkowania magnetycznego pomimo przeciwdziałającemu temu efektowi wpływowi termicznych drgań atomów.

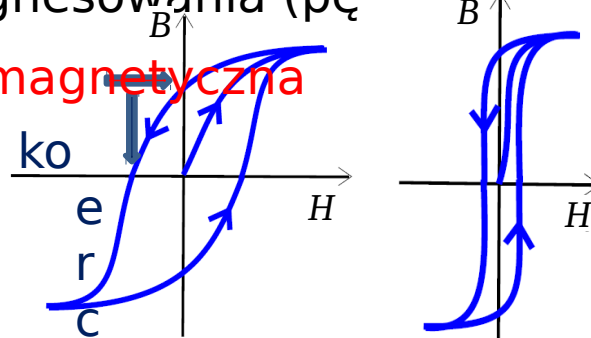


Rys.4.4.6 Struktura domenowa ferromagnetyka, schemat

W materiałach tych, zwanych *ferromagnetykami* szczególne znaczenie ma oddziaływanie *wymiany* pomiędzy momentami magnetycznymi elektronów. Oddziaływanie to jest efektem kwantowym i związane jest z zakazem Pauliego, zasadzie zabraniającej m.in. elektronom zajmowania takich samych stanów energetycznych. Oddziaływanie wymienne prowadzi do lokalnego porządkowania momentów magnetycznych atomów w materiale ferromagnetycznym. W efekcie tworzą się w takim materiale obszary, zwane domenami w których momenty magnetyczne atomów są jednakowo ustawione.

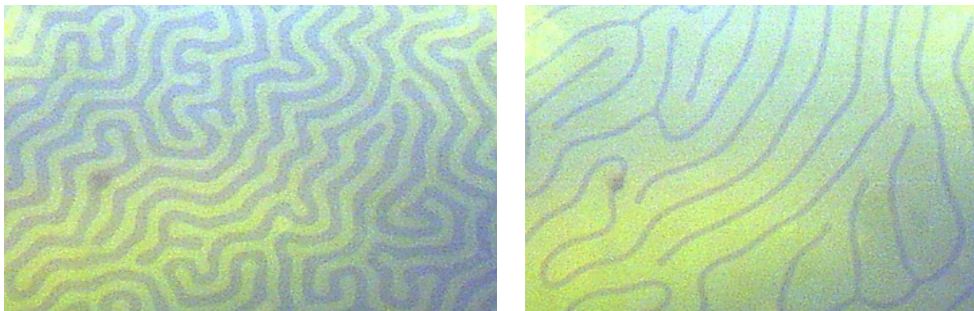
Krzywa namagnesowania (pę

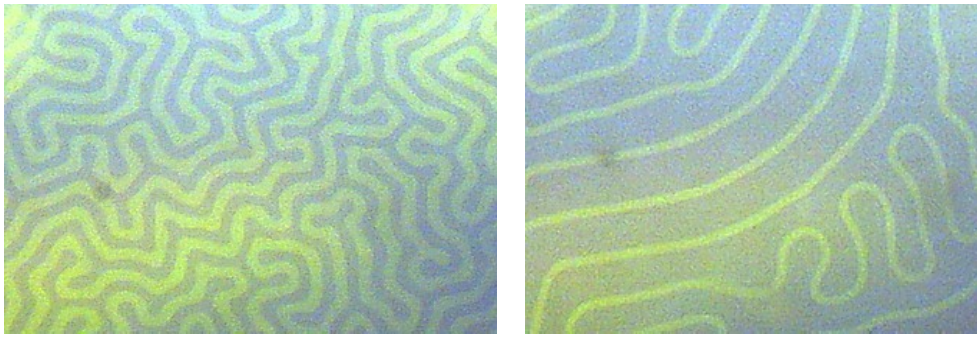
pozostałość magnetyczna



ferromagnetyk twardy ferromagnetyk miękki

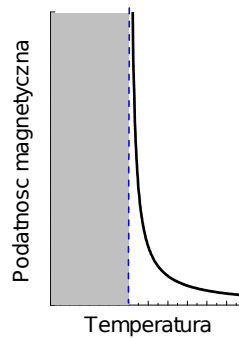
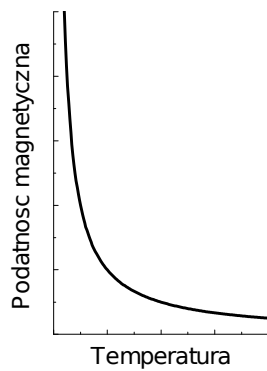
Rys.4.4.7 Histereza ferromagnetyka, schemat

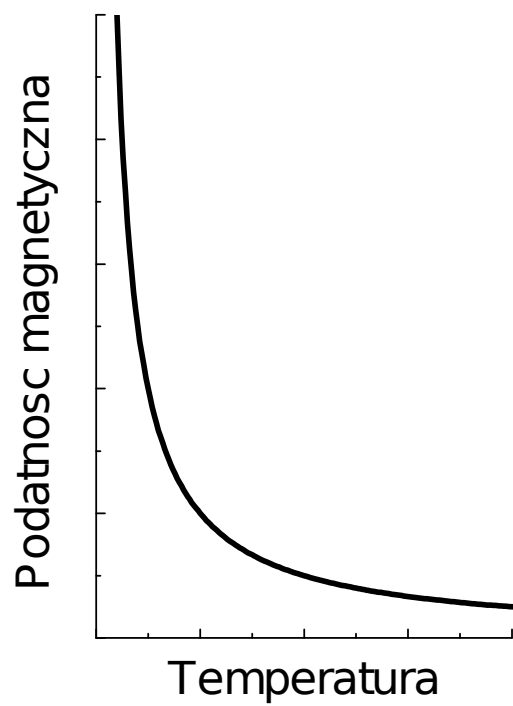




Rys. 4.4.8. Mikroskopowa struktura warstwy $(\text{TmBi})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$ umieszczonej pomiędzy dwoma skrzyżowanymi polaryzatorami. Ciemne i jasne obszary są namagnesowane antyrównolegle

Analizując własności ferromagnetyków należy pamiętać, że powyżej pewnej temperatury krytycznej, zwanej temperaturą Curie (T_C), tracą one swoje ferromagnetyczne własności i zachowują się jak paramagnetyki.





$$\chi = \frac{c}{T}$$

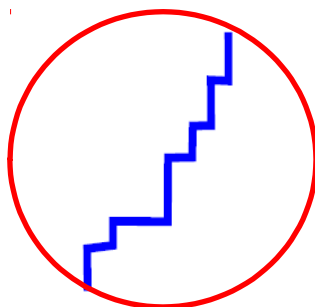
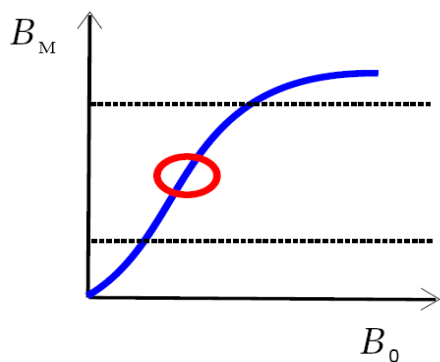
prawo Curie

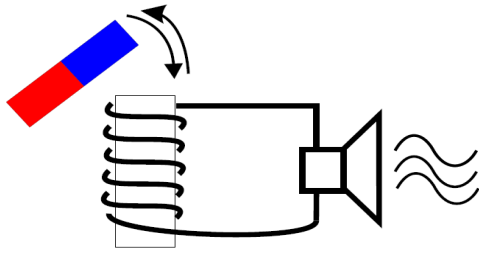
$$\chi = \frac{c}{T - T_C}$$

prawo Curie-Weissa

material	Temperatura Curie (K)
żelazo	1043
kobalt	1400
nikiel	631
gadolin	292
dysproz	85

Heinrich Georg Barkhausen ur. 2 grudnia, 1881 w Bremie, zm. 20 lutego 1956 w Dreźnie zaobserwował, że proces magnesowania ferromagnetyka nie zachodzi w sposób ciągły, ale skokowy. Okazuje się, że przesuwanie się pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego ściany domen blokowane są przez defekty w kryształach i proces ich przesuwania ma charakter dyskretny. Można to zaobserwować w prostym eksperymencie, w którym do cewki nawiniętej na próbkę ferromagnetyka dołączony jest wzmacniacz i głośnik. Magnesowaniu ferromagnetyka towarzyszą dobrze słyszalne trzaski.





Rys. 4.4.9. Efekt Barkhausena

4.5 Indukcja elektromagnetyczna

Trzaski słyszane w doświadczeniu Barkhausena są wynikiem przepływu prądu na skutek gwałtownych zmian strumienia magnetycznego obejmowanego przez cewkę nawiniętą na ferroamagnetyk.

Poruszanie przewodnika w polu magnetycznym powoduje indukuje w nim siłę elektromotoryczną. Wartość tej siły zależy od prędkości zmian strumienia magnetycznego obejmowanego przez ten przewód. Okazuje się, że prawo Faradaya:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

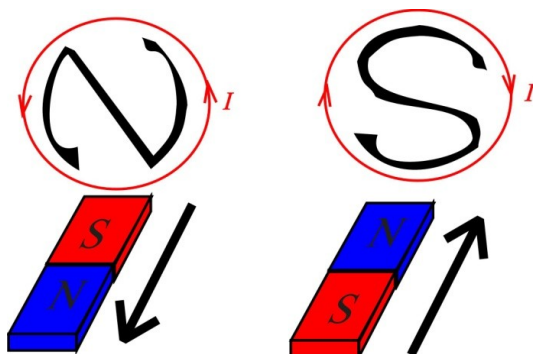
dotyczy także zmian indukcji pola magnetycznego, powierzchni cewki, kąta pomiędzy powierzchnią cewki, a kierunkiem indukcji B .

Jeśli w obszarze zmian strumienia magnetycznego znajdzie się przewód to pod wpływem indukowanej siły elektromotorycznej popłynie w nim prąd elektryczny.



Rys. 4.5.1. Michel Faraday, ur. 22/9/1791 Newington Butts, zm. 25/8/1867 Hampton Court,

Indukowany prąd płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego, która ten prąd indukuje (reguła Lenza).



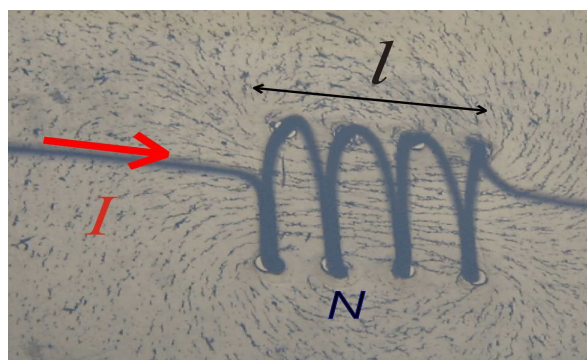
Rys.4.5.2 Reguła Lenza

Takie indukowane prądy nazywamy prądami wirowymi (Foucault). Można zaobserwować ich powstawanie w szeregu interesujących doświadczeń.



Rys. 4.5.3. Jean Bernard Léon Foucault , ur. 18/9/1819, Paryż , zm. 11/2/1868, Paryż

4.6 Indukcyjność cewki, transformator



Indukcyjność solenoidu L określa strumień magnetyczny przenikający ten solenoid:

$$N\Phi_B = LI$$

Jednostką indukcyjności jest henr:

$$1 \text{ henr [H]} = 1 \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}}$$

Rys. 4.6.1. Pole magnetyczne wokół cewki

Siła elektromotoryczna indukcji wyrażona przez indukcyjność wynosi:

$$\varepsilon_L = -\frac{dN\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Przyjmijmy, że n jest liczbą zwojów przypadających na jednostkę długości solenoidu, a S powierzchnią jego przekroju:

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow N\Phi_B = nlBS$$

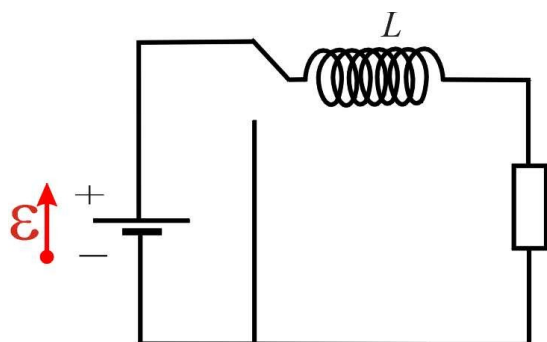
Wówczas indukcja magnetyczna B w solenoidzie wynosi:

$$B = \mu_0 nI \Rightarrow L = \frac{nlBS}{I} = \frac{\mu_0 n^2 l S}{I} = \mu_0 n^2 l S$$

Indukcyjność przypadająca na jednostkę długości:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S$$

Obwód RL



z II prawa Kirchhoffa można zapisać:

$$\varepsilon + \varepsilon_L - IR = 0$$

czyli

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + IR$$

Rys. 4.6.2. Obwód RL

Rozwiązanie równania jednorodnego:

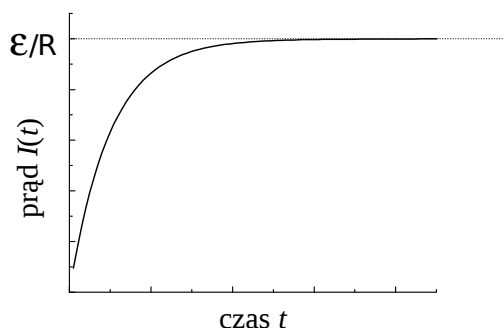
$$1' \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow I = I_0(t) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Po podstawieniu do równania niejednorodnego:

$$2' \quad \varepsilon = L \frac{dI_0}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} - L \frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + R I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{R}{L}t} + A$$

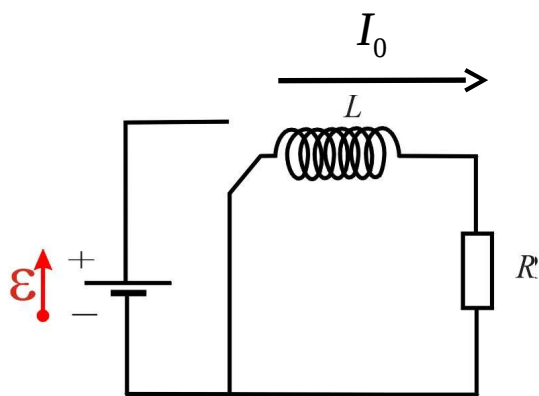
$$I(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{R}{L}t} + A \right) e^{-\frac{R}{L}t}, I(0) = 0 \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$



Wprowadzając stałą czasową τ_L można napisać

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right)$$

Rys. 4.6.3. Natężenie prądu w funkcji czasu w obwodzie RL



Rys. 4.6.4. Rozładowywanie obwodu RL.

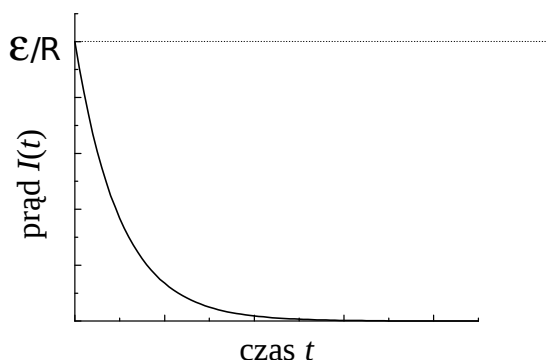
Po odłączeniu źródła SEM II prawo Kirchoffa przyjmuje postać:

$$0 = L \frac{dI}{dt} + IR$$

co daje rozwiązanie:

$$I(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{R}{L}t} + A \right) e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Prąd w obwodzie nie przestaje płynąć po odłączeniu źródła i zanika z charakterystyczną stałą czasową $\tau_L = L/R$



Rys. 4.6.5. Natężenie prądu w funkcji czasu w rozładowywanym obwodzie RL

Całkowita energia wydzielona na oporniku R podczas przepływu prądu w takim obwodzie RL wynosi:

$$W = \int_0^{\infty} I^2(t) R dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-\frac{2R}{L}t} R dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \left[-\frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \right]_0^{\infty} = \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{L}{2R} = \frac{\varepsilon^2}{R^2} \frac{L}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

i jest równa energii pola magnetycznego w cewce o indukcyjności L , przez którą płynie prąd o natężeniu I_0 .

Gęstość energii pola magnetycznego

Biorąc pod uwagę, że w idealnym solenoidzie pole magnetyczne jest zlokalizowane w jego objętości można napisać, że gęstość energii pola magnetycznego u_B wynosi:

$$u_B = \frac{E_B}{Sl} = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{Sl} = \frac{L}{2Sl} I^2 = \frac{\mu_0 n^2 l S}{2lS} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

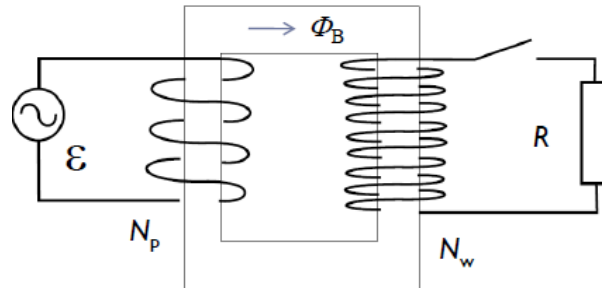
ale:

$$B = \mu_0 nI$$

zatem

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Transformator



Rys.4.6.6 Schemat transformatora

Załóymy, że w obwodzie pierwotnym siła elektromotoryczna zmienia się z czasem jak

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

. Indukowana SEM przypadająca na jeden zwój jest jednakowa w obu uzwojeniach

$$\varepsilon_z = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_p}{N_p} = \frac{U_w}{N_w}$$

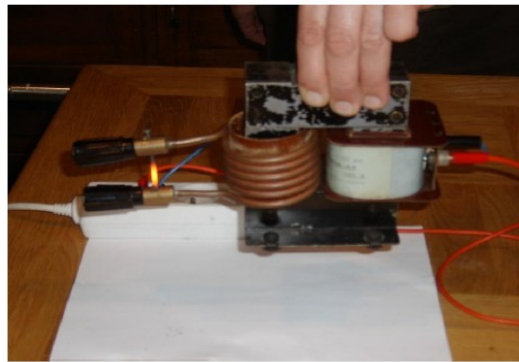
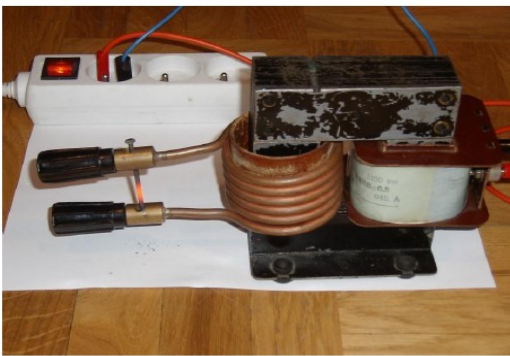
transformacja napięcia:

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p}$$

Po zamknięciu klucza, ze źródła pobierana jest energia:

- w obwodzie wtórnym płynie prąd, tracona moc: U_w^2/R
- przepływ prądu generuje w obwodzie pierwotnym SEM indukcji,
- w celu podtrzymania napięcia U_w źródło dostarcza dodatkowy prąd I_p
- z zasady zachowania energii:

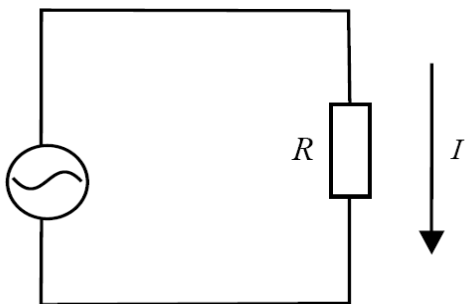
$$I_p U_p = I_w U_w \Rightarrow I_p = \frac{1}{R} \left(\frac{N_w}{N_p} \right)^2 U_p$$



Rys.4.6.7 Rozgrzany do czerowności drut w uzwojeniu wtórnym transformatora

4.7 Obwody prądu przemiennego

Rozważmy zagadnienie obwodu elektrycznego, w którym znajduje się źródło siły elektromotorycznej, której wartość zmienia się periodycznie z czasem oraz opornik.



Rys. 4.7.1 Schemat obwodu ze źródłem SEM i opornikiem R

Przyjmijmy, że siła elektromotoryczna w obwodzie zmienia się z czasem jak:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

Wówczas natężenie prądu w tym obwodzie musi zmieniać się z taką samą częstotliwością. Natężenie prądu może być *a priori* przesunięte w fazie w stosunku do siły elektromotorycznej o kąt φ :

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Do rozwiązania problemu zastosujemy liczby zespolone. Zauważamy, że siła e-m ε i natężenie prądu I mogą być przedstawione jako części rzeczywiste wielkości zespolonych. O tych zespolonych wielkościach można myśleć jak o wektorach wirujących wokół początku układu współrzędnych z częstością ω .

$$\varepsilon = \text{Re}(\hat{\varepsilon}) = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{i\omega t}) = \varepsilon_0 \text{Re}(\cos\omega t + i \sin\omega t)$$

$$\begin{aligned} I &= I_0 \cos(\omega t - \varphi) = \text{Re}(\hat{I}) = \text{Re}(I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}) \\ &= I_0 \text{Re}(\cos(\omega t - \varphi) + i \sin(\omega t - \varphi)) \end{aligned}$$

Z II prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \hat{I}R \\ \varepsilon_0 e^{i\omega t} &= I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \varepsilon_0 &= I_0 R e^{-i\varphi} \\ \varphi = 0 &\rightarrow \varepsilon_0 = I_0 R \end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\varepsilon_0}{R} \\ I(t) &= I_0 \cos\omega t = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos\omega t \end{aligned}$$

Zgodnie z oczekiwaniem faza natężenia prądu jest zgodna z fazą siły elektromotorycznej, a w każdej chwili natężenie prądu jest proporcjonalne do SEM.

Obwody prądu przemiennego – obwód RL

ε

Siła elektromotoryczna zmienia się jak:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

Z II prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$$

czyli:

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Rys. 4.7.2. Schemat obwodu ze źródłem SEM, opornikiem R i cewką o indukcyjności L

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \hat{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Podstawiając wielkości zespolone otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 e^{i\omega t} &= I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} + i\omega L I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \\ \varepsilon_0 e^{i\varphi} &= I_0 R + iI_0 \omega L \\ \varepsilon_0 \cos \varphi + i\varepsilon_0 \sin \varphi &= I_0 R + iI_0 L \omega \\ \varepsilon_0 \cos \varphi &= I_0 R \\ \varepsilon_0 \sin \varphi &= I_0 L \omega \end{aligned}$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

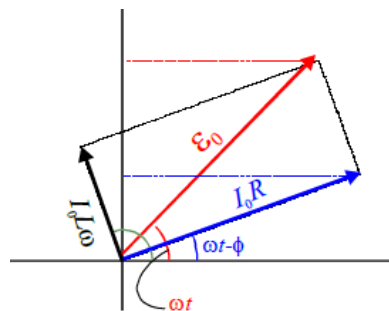
$$\varepsilon_0^2 = I_0^2 (R^2 + L^2 \omega^2) \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

oraz:

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

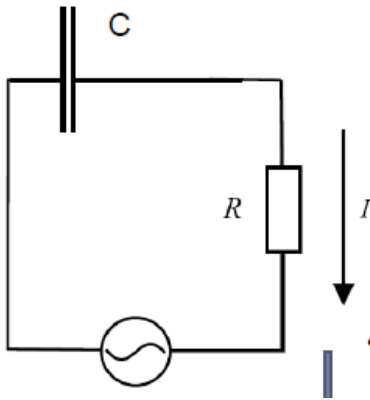
Wielkość nazywamy impedancją.

Z powyższych rozważań wynika, że natężenie prądu przesunięte jest w fazie (opóźnia się) w stosunku do siły elektro-motorycznej. Wielkość tego przesunięcia można określić metodą geometryczną (Patrz Rys. 4.7.3).



Rys. 4.7.3. Diagram wskazowy pokazujący wzajemne relacje siły elektromotorycznej i natężenia prądu w obwodzie RL prądu przemiennego.

Obwody prądu przemiennego – obwód RC



Rys. 4.7.4. Schemat obwodu ze źródłem SEM, opornikiem R i kondensatorem o pojemności C

Z II prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C}$$

Jak uprzednio zakładamy, że:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

i poszukujemy rozwiązania w postaci:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \hat{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Po zróżniczkowaniu II prawa Kirchhoffa uzyskujemy:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dI}{dt} R + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$

czyli:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dI}{dt} R + \frac{1}{C} I$$

Zatem:

$$\varepsilon_0 i \omega e^{i\omega t} = i \omega I_0 R e^{i(\omega t - \varphi)} + \frac{1}{C} I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$i \varepsilon_0 \omega e^{i\varphi} = i \omega I_0 R + \frac{1}{C} I_0$$

$$i \varepsilon_0 \omega \cos \varphi - \varepsilon_0 \omega \sin \varphi = i \omega I_0 R + \frac{1}{C} I_0$$

Porządkując część rzeczywistą i urojoną powyższego równania uzyskujemy:

$$\varepsilon_0 \cos \varphi = I_0 R$$

$$\varepsilon_0 \sin \varphi = -\frac{I_0}{C \omega}$$

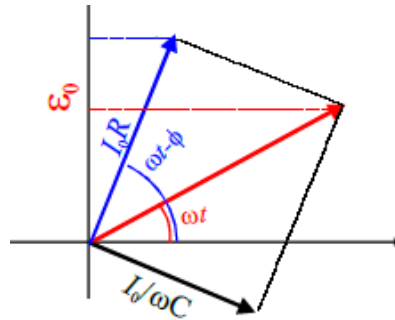
i stąd:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{RC \omega}$$

oraz

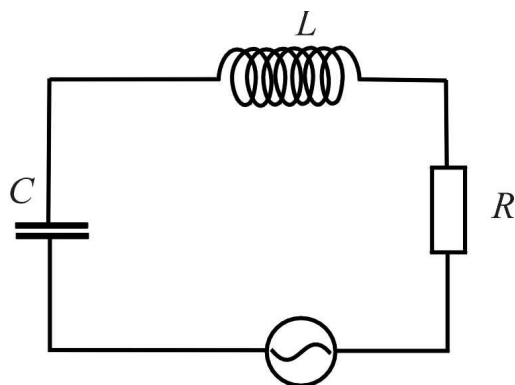
$$\varepsilon_0^2 = I_0^2 \left(R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2} \right) \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}$$

Natężenie prądu przesunięte jest w fazie (wyprzedza) siłą elektromotoryczną. Wielkość tego przesunięcia można określić jak uprzednio metodą geometryczną:



Rys. 4.7.5. Schemat obwodu ze źródłem SEM, opornikiem R i cewką o indukcyjności L

Obwody prądu przemiennego – szeregowy obwód RLC



Rys. 4.7.6. Schemat obwodu ze źródłem SEM, opornikiem R , cewką o indukcyjności L i kondensatorem o pojemności C

Z II prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt}$$

Jak uprzednio zakładamy, że:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

i poszukujemy rozwiązania w postaci:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow \hat{I} = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Po zrózniczkowaniu II prawa Kirchhoffa uzyskujemy:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2}$$

i po podstawieniu liczb zespolonych:

$$i\varepsilon_0 \omega e^{i\omega t} = iR\omega I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} + \frac{I_0}{C} e^{i(\omega t - \varphi)} - \omega^2 L I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{I_0}{C\omega} - \omega LI_0 + iRI_0 = i\varepsilon_0 e^{i\varphi}$$

czyli:

$$\frac{I_0}{C\omega} - \omega LI_0 + iRI_0 = i\varepsilon_0 \cos \varphi - \varepsilon_0 \sin \varphi$$

Stąd:

$$\begin{aligned} -\omega LI_0 + \frac{I_0}{C\omega} &= -\varepsilon_0 \sin \varphi \\ RI_0 &= \varepsilon_0 \cos \varphi \end{aligned}$$

Ostatecznie :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

i

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla tzw. częstotliwości rezonansowej ω_r , dla której spełniony

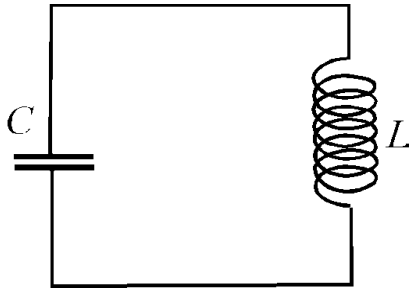
jest warunek: $\frac{1}{\omega_r C} = L\omega_r$, czyli dla $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, natężenie prądu osiąga wartość

maksymalną: $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$, a przesunięcie fazowe pomiędzy siłą elektromotoryczną, a natężeniem prądu wynosi 0.

Dobrocią układu rezonansowego nazywamy stosunek energii zgromadzonej w cewce do energii traconej w oporniku dla warunku rezonansu:

$$Q = \frac{L\omega_r}{R}$$

Drgania obwodu LC



Rys.4.7.7 Obwód LC

$$0 = \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 q$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Rozwiązania mają postać:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$q(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

$$\frac{dq}{dt}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

$$q_0 = U_0 C$$

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = I(t) = -\omega U_0 C \sin(\omega t)$$

Energia zmagazynowana w obwodzie

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2(\omega t)$$

$$E_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2q^2_0 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}Lq^2_0 \frac{1}{LC} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{q^2_0}{C} \sin^2 \omega t$$

$$E_{tot} = E_L + E_C =$$

$$\frac{1}{2} \frac{q^2_0}{C} (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \frac{1}{2} \frac{q^2_0}{C} = \frac{1}{2} U^2 C$$