5. Równania Maxwella

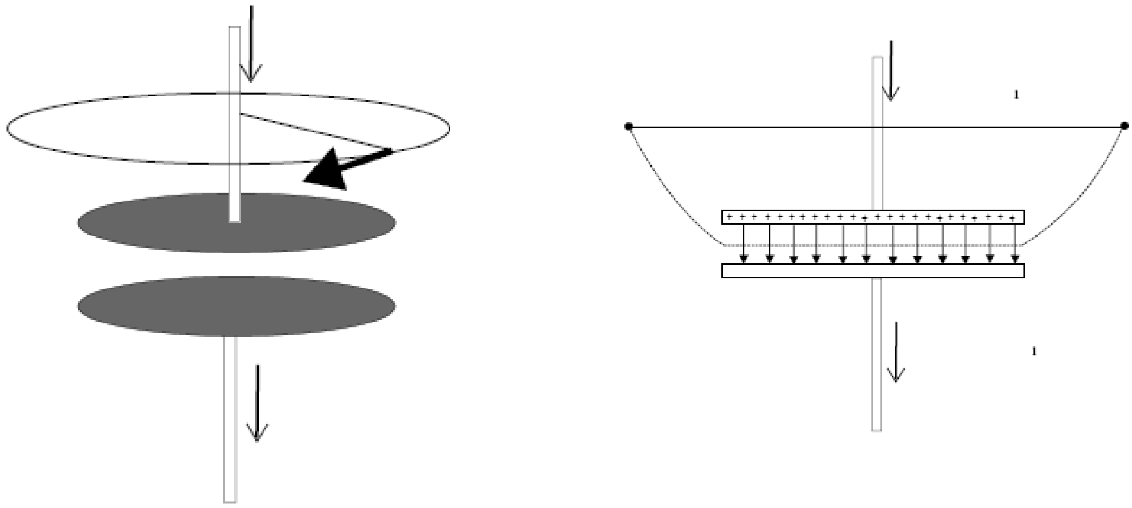
5.1 Równania Maxwella

Wśród pokazanych uprzednio równań Maxwella znajduje się prawo Ampere'a

$$\nabla \times B = \mu_0 j$$

Jednak można pokzać, że postać ta nie jest pełna, że brakuje pewnego składnika związanego z tzw „prądem przesunięcia". Można to pokazać na dwa sposoby.

Prąd przesunięcia (I)



Rys. 5.1.1 Prąd przesunięcia

Rozważmy ładujący się kondensator. Dopływa do niego prąd o natężeniu I, co powoduje że

$$\oint B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I$$

dla konturu S1 .

Kontur S_2 nie obejmuje jednak żadnego przepływającego prądu, krążenie wektora indukcji nie powinno zależeć od konturu.

Dla konturu S_2

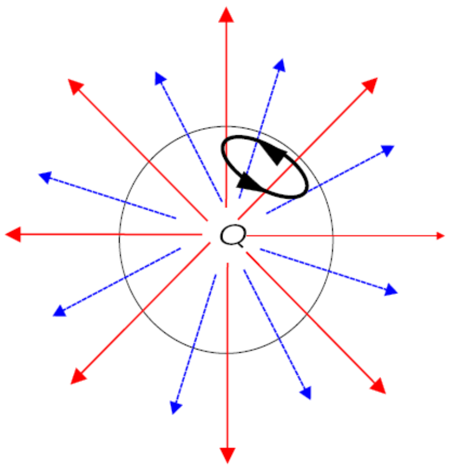
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\pi r^2}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} j \Rightarrow j = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Sugeruje to, że pelną formą równania jest

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Prąd przesunięcia (II)



Rys.5.1.2. Prad przesunięcia

Wyobraźmy sobie kulę, w której dochodzi do rozpadów promieniotwórczych i lekkie naładowane cząstki opuszczają jej wnętrze. Ładunek wypływający z kuli ładunek tworzy prąd:

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r)$$

Wybierzmy kontur leżący na powierzchni sfery o promieniu r. Krążenie pola *B* po konturze związane jest z prądem przepływającym wewnątrz tego konturu, ale wektor *B* na powierzchni kuli nie może mieć składowej stycznej co oznacza, że krążenie to musi znikać.

Czyli:

$$\mu_0 j + f(t) = 0$$

$$f(t) = -\mu_0 j$$

$$f(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial t} 4\pi\varepsilon_0 r^2 \vec{E}$$

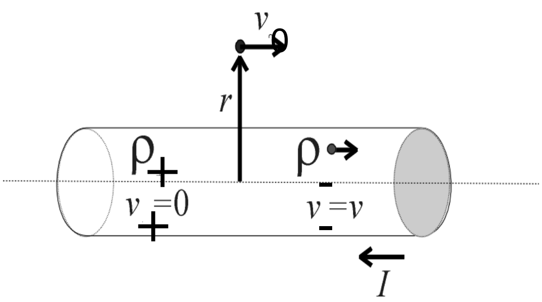
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Prowadzi do do ostatecznej formy równań Maxwella:

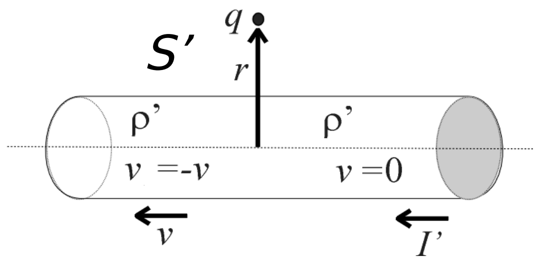
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(r) dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla \cdot B = 0$	$\int B \cdot dS = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

5.2 Transformacja pól

Siła Lorentza zależy od prędkości – w jakim układzie? Rozważmy neutralny elektrycznie przewód, w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu I. Prąd związny jest z ruchem elektronów o prędkości v. W wyniku tego przepływu w odległości r od przewodu powstaje pola magnetyczne o indukcji B. W punkcie tym umieszczmy ładunek q poruszający się z predkością v_0.



Rys. 5.2.1 Nieruchomy przewód, poruszający się ładunek



Rys. 5.2.2 Poruszający się przewód, nieruchomy ładunek

Gęstość elektronów równa jest gęstości ładunku dodatniego, nieruchomego w układzie odniesienia związanym z przewodem

$$\rho_+ = \rho_-$$
.

Siła Lorentza działająca na ładunek q:

$$F = qv_0 \times B$$
.

Indukcja pola magnetycznego B:

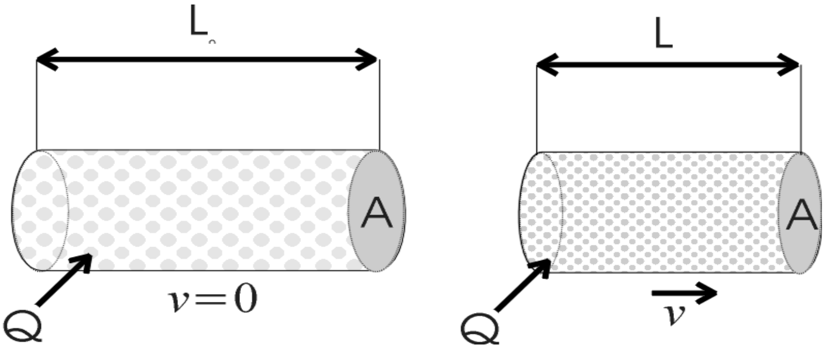
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow F = qv_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
,

co można wyrazić jako funkcję gęstości ładunku i prędkości nośników:

$$I = \rho_- vA \Rightarrow F = qv_0 \frac{\mu_0 \rho_- Av}{2\pi r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\rho_- Avv_0}{r}$$
.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy: $v_0 = v$, wówczas

$$F = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}$$
.



Rys. 5.2.3 Transformacja długości

Przejdźmy teraz do układu związanego z poruszającym się ładunkiem q.

Spoczywający w pierwszym układzie ładunek *Q* będzie się w drugim układzie poruszał z prędkością v.

$$Q = \rho_0 L_0 A$$

$$Q = \rho L A$$

$$\rho = \frac{L_0}{L} \rho_0$$

Ładunek jest niezmienniczy, ale ze względu na skrócenie Lorentza zmienia się jego gęstość:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

.

W podobny sposób transformujemy gęstość ładunku ujemnego, który jednak spoczywa w układzie drugim, a porusza się w układzie pierwszym. Oznacza to, że:

$$|\rho_+| = |\rho_-|$$

$$F = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Gęstość wypadkowa ładunku w układzie drugim wynosi

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$\rho_- = -\rho_+ \Rightarrow \rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

A więc poruszający się przewód jest naładowany!

Pole elektryczne w pobliżu naładowanego walca wynosi:

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{vB}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Siła działająca na cząstkę w układzie S':

$$F' = qE' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ A}{r}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Siły transformują się przy przejściu z układu do układu!

Zbadajmy pęd poprzeczny nabywany pod wpływem działającej siły:

$$\Delta p_y = F\Delta t$$

$$\Delta p_y = F'\Delta t'$$

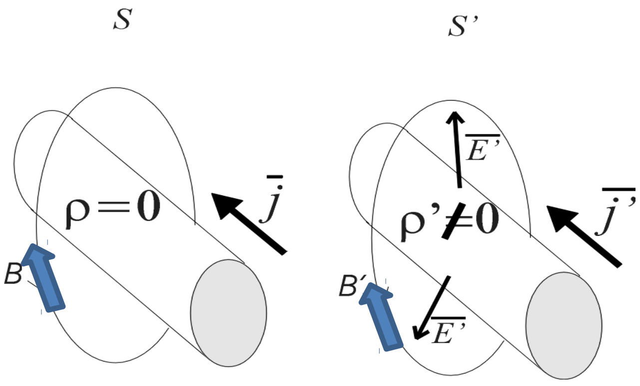
ale

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta p'_y} = \frac{F\Delta t}{F'\Delta t'} = 1$$

Siły elektryczne i magnetyczne są częściami oddziaływania elektromagnetycznego

Podział na część elektryczną i magnetyczną zależy od doboru układu współrzędnych



Rys. 5.2.4. A więc poruszający się przewód jest naładowany

Transformacja pól elektromagnetycznych

Szczególna teoria względności:

$$(E,B) \rightarrow (E',B')$$

$$\vec{E}'_{II} = \vec{E}_{II}; \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{(E + v \times B)_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$\vec{B}'_{II} = \vec{B}_{II}; \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}\right)_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

5.3. Fala elektromagnetyczna

Rozwiązujemy równania Maxwella w obszarze bez prądów i ładunków

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Zastosujmy operator rotacji do przedostatniego równania otrzymujemy:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial B}{\partial t}$$

.

Jednocześnie wiadomo, że

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla\cdot(\nabla\cdot E)-\nabla^2 E$$

.

Ponieważ różniczkowanie po czasie i po współrzędnej przestrzennej są niezależne to:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Otrzymujemy równanie falowe:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

Co po rozpisaniu na współrzędne oznacza, że:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0$$

Wynikająca z tego równania prędkość fali

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Fala elektromagnetyczna to rozchodzące się w przestrzeni zaburzenie pola elketycznego i magnetycznego. Załóżmy, że fala rozchodzi się w kierunku *x*.

$$E_0=E_{0j}\hat{1}_j$$

$$E=E_0e^{ikx}e^{-i\varpi t}$$

$$-k^2 E_{0j} e^{-i\varpi t} e^{ikx} + \frac{\varpi^2}{c^2} E_{0j} e^{-i\varpi t} e^{ikx} = 0$$

$$\frac{\varpi^2}{c^2} - k^2 = 0 \Rightarrow \varpi^2 = k^2 c^2$$

Wynika stąd związek dyspersyjny wiążący współrzędne czasowe i przestrzenne w fali elektromagnetycznej

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \varpi = \frac{2\pi}{T}$$

Powracając do równań Maxwella można też znaleźć związek pomiędzy kierunkiem pola elektrycznego i magnetycznego w fali e.m.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

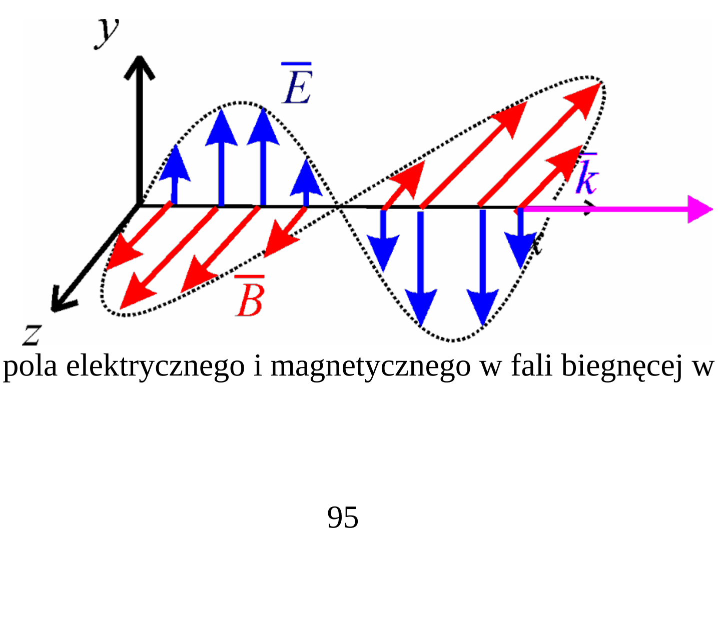
$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-i\omega t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{k} = 0$$

$$B = B_0 e^{ikr} e^{-i\omega t} \qquad \nabla \cdot B = B \cdot k = 0$$

$$E_0 \times k = -\omega B_0$$

$$\vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\varpi}{c^2} \vec{E}_0$$



Rys.5.3.1 Układ pola elektrycznego i magnetycznego w fali biegnęcej w prawo

$$k^2 = \frac{\varpi^2}{c^2}$$

Fala elektromagnetyczna przenosi zarówno pęd jak i energię. Przekza energii opisywany jest przez wektor Poyntinga. Przypomnijmy, że

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wprowadzając wektor ***B'***

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{B}'$$

można napisać

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}' = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{B}'\frac{\partial B'}{\partial t}\right) = \vec{E}\left(\nabla \times \vec{B}'\right) - \vec{B}'\left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}'\right)$$

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}'^2\right) + \nabla\left(\vec{E} \times \vec{B}'\right) = 0$$

Zdefiniujmy wektor ***S***- wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = c^2\varepsilon_0\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = c\varepsilon_0\left(\vec{E} \times \vec{B}'\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{S} = c\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\vec{E}\times\vec{B}'\right) = -\frac{1}{2c}c\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}'^2\right) =$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{B}^2\right) = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$